

---

# Maths expérimentales : Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

---

Cette session se place dans le contexte suivant :

- Terminale Voie Générale (Spécialité)
  - Analyse
    - Continuité des fonctions d'une variable réelle : "Pour une fonction continue  $f$  d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ ."

Nous allons traiter expérimentalement un exemple particulier. A la fin nous ferons une petite discussion sur la possibilité de prouver *avec l'ordinateur* les différentes conjectures.

## Sommaire

---

- [Tracer des trajectoires](#)
- [L'escargot](#)
- [Vers une preuve assistée par ordinateur?](#)

```
# Cette cellule sert à faire un bel affichage du notebook
from IPython.core.display import HTML
def css_styling():
    styles = open("./style/custom2.css").read()
    return HTML(styles)
css_styling()
```

```
# On charge les librairies Python

import matplotlib.pyplot as plt # Pour tracer des graphiques
import numpy as np             # Pour faire des maths

# Cette commande demande que les sorties graphiques soient dans la fenêtre pri
%matplotlib inline
```

```
# Librairies spéciales pour pouvoir créer des boutons interactifs ("widgets")
from ipywidgets import widgets
from ipywidgets import interact
from IPython.display import display
```

---

# Tracer des trajectoires

---

## Un exemple de suite périodique

Nous allons travailler avec l'exemple de la suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_n &= f(u_{n-1}) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

où  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  est un paramètre et

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

L'objectif est de déterminer expérimentalement le comportement de la suite  $(u_n)$ .

On commence par définir la fonction  $f$  en Python :

```
def f(x):
    return (1+x)/(1-x)
```

On peut afficher des valeurs :

```
print(f(4))
print(f(0))
-1.6666666666666667
1.0
```

La fonction suivante `Suite_u()` permet de calculer le  $n$ -ème terme de la suite, elle prend trois arguments : une fonction  $g$ , un indice  $n$  et un paramètre  $a$  qui est le premier terme.

Ne pas hésiter à faire varier  $a$ !

```

def Suite_u(g,a,n):
    # entree : g=fonction n=indice, a= 1er terme
    if n==0: # Si n=0 alors on renvoie a
        return a
    else:    # Sinon on applique la récurrence
        return g(Suite_u(g,a,n-1))

# Test
a=0.7 # valeur du paramètre
n_max=10 # n jusqu'auquel on affiche

for n in range(n_max+1): # On affiche les n_max premières valeurs
    print('Pour n = '+str(n)+' on a u_n = '+str(Suite_u(f,a,n)))

Pour n = 0, on a u_n = 0.7
Pour n = 1, on a u_n = 5.666666666666666
Pour n = 2, on a u_n = -1.4285714285714286
Pour n = 3, on a u_n = -0.1764705882352941
Pour n = 4, on a u_n = 0.7
Pour n = 5, on a u_n = 5.666666666666666
Pour n = 6, on a u_n = -1.4285714285714286
Pour n = 7, on a u_n = -0.1764705882352941
Pour n = 8, on a u_n = 0.7
Pour n = 9, on a u_n = 5.666666666666666
Pour n = 10, on a u_n = -1.4285714285714286

```

C'est bien sûr plus visuel de tracer quelques trajectoires de  $n \mapsto u_n$ . Voici un code qui permet de le faire, tout en faisant varier le paramètre  $a$ .

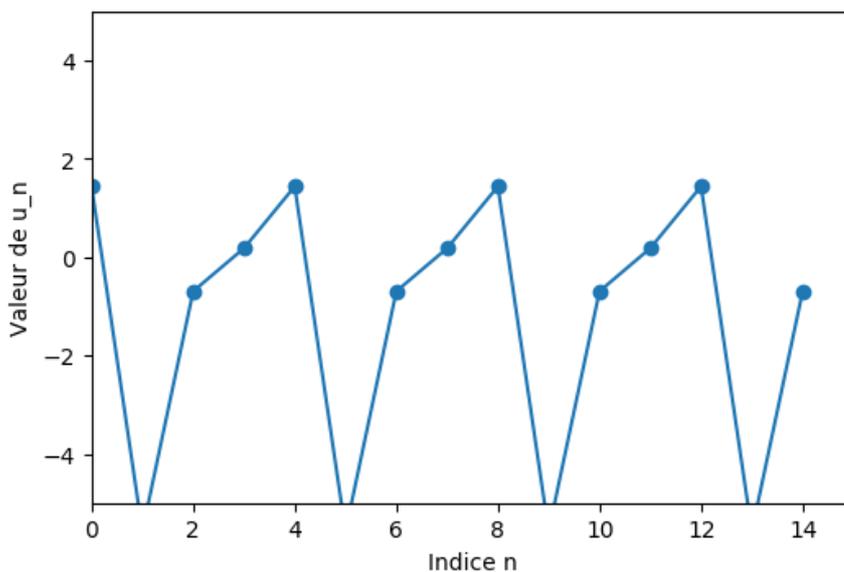
```

n_max=15
def TracerTrajectoires(a):
    N = range(n_max)
    u_n=[Suite_u(f,a,n) for n in N] # On calcule u(1),...,u(n)
    plt.figure(dpi=100) # choix de la résolution de l'image
    plt.axis([0, n_max,-5,5])
    plt.plot(N,u_n,'o-') # on trace les valeurs, représentées par d
    plt.xlabel('Indice n'),plt.ylabel('Valeur de u_n')
    plt.show()

interact(TracerTrajectoires, a=(0, 0.7, 3, 0, 1)) # On lance la fonction avec un

```

a



<function \_\_main\_\_.TracerTrajectoires(a)>

Il semble maintenant assez clair que pour tout  $a \notin \{-1, 0, 1\}$ , la suite  $(u_n)$  est périodique de période 4.

(Ou éventuellement de période 2 pour certaines valeurs de  $a$ , mais c'est difficile à deviner pour l'instant.)

Pour démontrer ceci il "suffirait" de montrer que  $f \circ f \circ f \circ f(x) = x$  pour tout  $x$ . En effet on aurait alors pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+4} = f(u_{n+3}) = f(f(u_{n+2})) = f(f(f(u_{n+1}))) = f(f(f(f(u_n)))) = u_n.$$

Le code suivant trace  $f, f \circ f, f \circ f \circ f$  et  $f \circ f \circ f \circ f$ . On commence par écrire une fonction récursive `Itereef(x, k)` qui calcule l'itérée  $k$  fois de  $f$  en  $x$ .

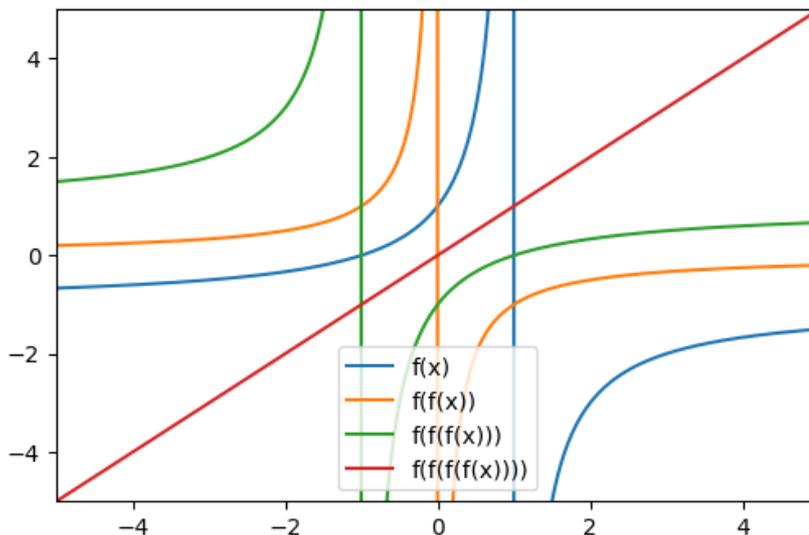
```
def Itereef(g,x,k):
    # renvoie g^k(x) (f itérée k fois)
    if k==1:
        return g(x)
    else:
        return g(Itereef(g,x,k-1))
```

```
xmin=-5
xmax=5

X=np.arange(xmin,xmax,0.011)
f1=[f(x) for x in X]
f2=[Itereef(f,x,2) for x in X]
f3=[Itereef(f,x,3) for x in X]
f4=[Itereef(f,x,4) for x in X]

plt.figure(dpi=100)
plt.axis([-5,5,-5,5])
plt.plot(X,f1,label='f(x)')
plt.plot(X,f2,label='f(f(x))')
plt.plot(X,f3,label='f(f(f(x)))')
plt.plot(X,f4,label='f(f(f(f(x))))')

plt.legend(loc='best') # mettre la légende au meilleur endroit!
plt.show()
```



Remarque.

1. Effectivement on observe bien  $f \circ f \circ f \circ f(x) = x$ . mais attention le graphique ignore complètement le fait que cette opération est illicite pour  $x \in \{0, -1, 1\}$ !
2. On remarque aussi que  $f \circ f$  n'a pas de point de fixe : sur le graphique ci-dessus il n'existe pas de  $x$  tel que

$$f \circ f(x) = x.$$

On en déduit ainsi qu'il n'existe pas de  $a$  tel que  $(u_n)$  soit de période 2.

---

## *Tracer l'escargot*

---

```

xmin=-8
xmax=8
ymin=-8
ymax=8
amin=0.1
amax=1.6

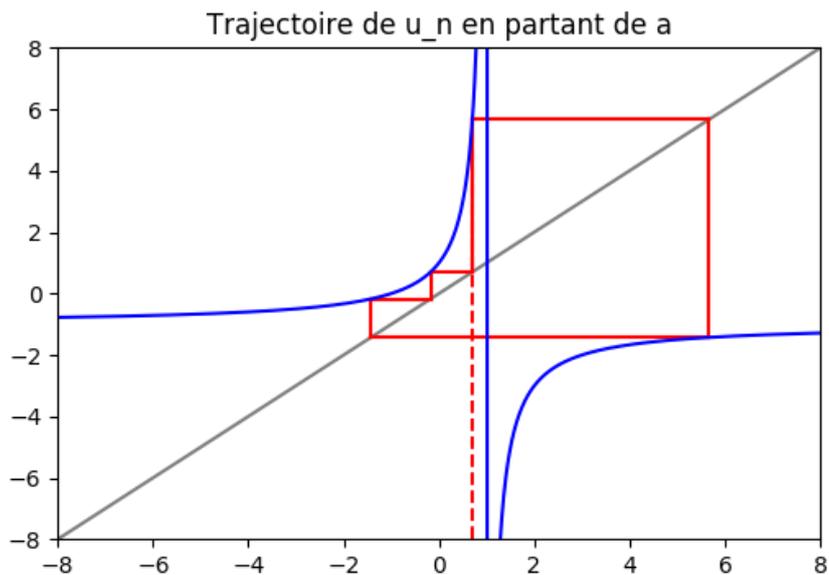
def escargot(a,n):
    # a = valeur initiale
    # xmin,xmax = intervalle des x
    # n = nombre d'étapes de l'escargot
    u = a
    X=np.arange(xmin,xmax,0.01)
    plt.figure(dpi=100)
    plt.axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
    plt.plot(X, X, xmin, xmax, color='gray')
    plt.plot([u,u],[ymin,f(u)],'r--')
    for i in range(n):
        plt.plot([u,u],[u,f(u)],color='red')
        plt.plot([u,f(u)],[f(u),f(u)],color='red')
        u = f(u)
    plt.plot(X, [f(x) for x in X],color='blue')
    plt.title('Trajectoire de u_n en partant de a')
    plt.show

interact(escargot,a=(amin,amax,0.05),n=(4,10))

```

a

n



<function \_\_main\_\_.escargot(a, n)>

Suggestion. Modifier la fonction  $f$  définie au début et prendre

$$f(x) = \frac{1 + 0,9 \times x}{1 - x}.$$

Relancer toutes les cellules, qu'observe-t-on?

---

# Vers une preuve assistée par ordinateur?

---

Les différentes représentations de l'évolution de  $(u_n)$  que nous venons de voir ne laissent aucun doute sur le fait que la suite est bien périodique. Il ne s'agit pas d'une preuve bien sûr, mais on peut demander à Python de le faire pour nous, en utilisant le *calcul formel*.

En effet Python dispose d'une boîte à outils pour le calcul formel : **SymPy** (pour Symbolic Python). Il faut d'abord importer **SymPy** :

```
import sympy as sympy

from sympy import init_printing
init_printing()

#from sympy import init_session
#init_session()
```

On peut ensuite introduire des variables et expressions autour de ces variables :

```
sympy.var('x') # déclare la variable x
ExempleExpression = (x**2-1)/(x+1)
display(ExempleExpression)
```

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

On peut ensuite simplifier ces expressions avec la fonction `sympy.simplify`

```
ExempleSimplifie=sympy.simplify(ExempleExpression)
display(ExempleSimplifie)
```

$$x - 1$$

Pour notre exemple nous allons démontrer que  $(u_n)$  est périodique en montrant que pour tout  $x \neq -1, 1$ ,

$$f \circ f \circ f \circ f(x) = x$$

```
Expression_f=f(x)
Expression_f2=sympy.simplify(f(Expression_f))
display(' f iteree deux fois = '+str(Expression_f2))
Expression_f3=sympy.simplify(f(Expression_f2))
display(' f iteree trois fois = '+str(Expression_f3))
Expression_f4=sympy.simplify(f(Expression_f3))
display(' f iteree quatre fois = '+str(Expression_f4))
```

' f iteree deux fois = -1/x'

' f iteree trois fois = (x - 1)/(x + 1)'

' f iteree quatre fois = x'

Si on fait confiance à **SymPy** , la preuve est donc faite!

**Remarque.** On avait également conjecturé qu'il n'existe aucun  $a$  tel que  $(u_n)$  est de période 2. Nous pouvons également le démontrer en utilisant le calcul fait par **SymPy** car on obtient  $f \circ f(x) = -1/x$ , qui n'a pas de point fixe.