MAP 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

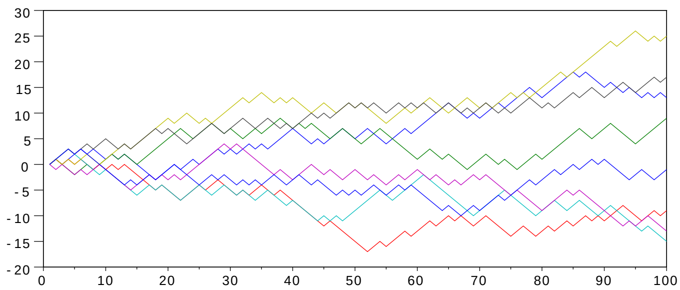
PC 1 - Année 2016

EXERCICE 1 -Marche aléatoire

On considère la marche aléatoire symétrique : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.



1. Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. Donner un équivalent de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini. *(On rappelle l'équivalent de Stirling $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$).*
2. Plus généralement, calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 2j)$ et $\mathbb{P}(S_{2n} = 2j+1)$ pour $-n \leq j \leq n$.
3. Quelle est la valeur la plus probable pour S_{2n} ?

EXERCICE 2 -limsup d'ensembles

Soit Ω un espace de probabilité, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements, on pose

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{p\geq 1}\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big).$$

1. On prend $\Omega = \mathbb{R}$, et on pose

$$A_n = [-1/n; 3+1/n]\,, \qquad B_n = [-2-(-1)^n; 2+(-1)^n]\,,$$

   Déterminer les $\limsup$ des suites $(A_n), (B_n)$.
2. On lance une infinité de fois un dé équilibré, donner Ω. Soit A_n l'événement "le n-ème dé tombe sur 6", décrire en Français l'événement "$\limsup_n A_n$".

EXERCICE 3 -Marche aléatoire : le cas biaisé

On considère maintenant une marche aléatoire biaisée : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1),$$

avec $p \in (0,1)$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
2. Que donne le Lemme de Borel-Cantelli lorsqu'on l'applique à la suite d'événements $\{S_{2n} = 0\}$?

EXERCICE 4 -Séquence de pile/face

On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour $n \geq 1$, on note M_n la longueur de la plus longue séquence de "piles" consécutifs durant les n premiers lancers. Par exemple :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
tirage	F	P	P	F	P	P	P	F	P	...
M_n	0	1	2	2	2	2	3	3	3	...

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (M_n).

1. Démontrer que pour tout $k \leq n$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq k) \leq (n-k+1)(1/2)^k$.
2. Démontrer que pour tout $k \leq n$ on a $\mathbb{P}(M_n < k) \leq \left(1-(1/2)^k\right)^{\lfloor n/k \rfloor}$.
3. En déduire le comportement asymptotique de (M_n) : trouver une suite de réels (a_n) tels que pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}\left(1-\varepsilon \leq \frac{M_n}{a_n} \leq 1+\varepsilon\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

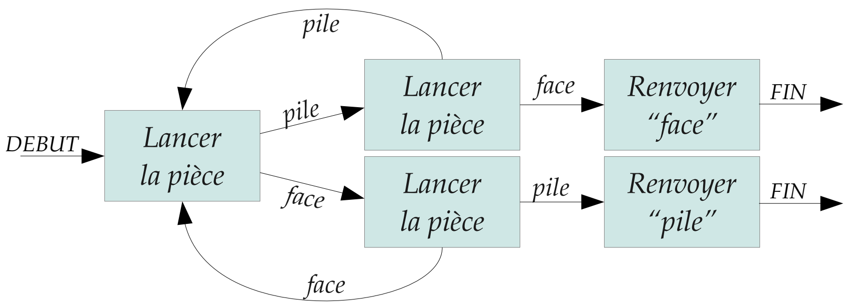
EXERCICE 5 -Sondage honnête

On cherche à faire un sondage pour savoir quelle proportion des élèves a triché à l'examen de MAP311. Craignant que tous ne disent pas la vérité, on imagine le protocole suivant. Chaque élève doit s'isoler, lancer un dé équilibré et répondre ensuite à la question "Avez-vous triché ?". S'il a obtenu 6 il doit mentir, sinon il doit dire la vérité.

Une proportion p d'élèves a répondu "j'ai triché", à combien estimeriez-vous la proportion de tricheurs ?

EXERCICE 6 -Bonus : Détruquer une pièce

On dispose d'une pièce truquée qui renvoie "pile" avec une probabilité p et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann[1] a imaginé l'algorithme suivant :



On note $T \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{\text{"pile"}, \text{"face"}\}$ le résultat de l'algorithme.

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?
2. Pour tout $k \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(T = k)$. En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement : $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien "pile" ou "face" avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = \text{"Pile"}) = 1/2$.

[1] Mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957).