MAP 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 2 - Année 2016

EXERCICE 1 -Saturation et détection

Soit X une v.a. exponentielle de paramètre 1, et a, ε des réels positifs.

1. Déterminer les fonctions de répartition de $Y = \min(X, a)$ et de $Z = X\mathbb{1}_{\{X>\varepsilon\}}$.
2. Y et Z ont-elles une densité ?
3. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

EXERCICE 2 - De nouvelles lois.

1. Déterminer la densité de e^X où X est une $\mathcal{N}(0,1)$ (on appelle cette loi la loi log-normale).
2. Soit R de densité $x \mapsto \frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Quelle est la loi de $|R|$?
3. Si T suit la loi exponentielle de paramètre 1, quelle est la loi de $\sqrt{T}$?

EXERCICE 3 -Une formule utile

Soit X une variable aléatoire positive, démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

Indication. *On peut intervertir espérance et intégrale : pour toute fonction positive* $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}_+$*, on a* $\int_I \mathbb{E}[f(Y,t)]dt = \mathbb{E}\left[\int_I f(Y,t)dt\right]$.

EXERCICE 4 -Temps d'arrêt. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure à s euros. On suppose que les offres sont indépendantes et toutes de même fonction de répartition F.

1. Soit $K \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison, quelle est la loi de K ?
2. Déterminer la loi du prix de vente $X \in [s, +\infty)$ de la maison.

EXERCICE 5 -Convergence du minimum

Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On note $M_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, en déduire sa densité et $\mathbb{E}[M_n]$.
2. Démontrer à l'aide du Lemme de Borel-Cantelli que, presque-sûrement, la suite (M_n) converge vers zéro.
3. Trouver une suite a_n telle que pour tout $t \geq 0$

   $$\mathbb{P}(a_n M_n \leq t) \overset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(E \leq t),$$

   où E est une exponentielle de paramètre 1.
4. **Bonus :** Quelle est la loi de N_n, la deuxième plus petite valeur des X_i ?

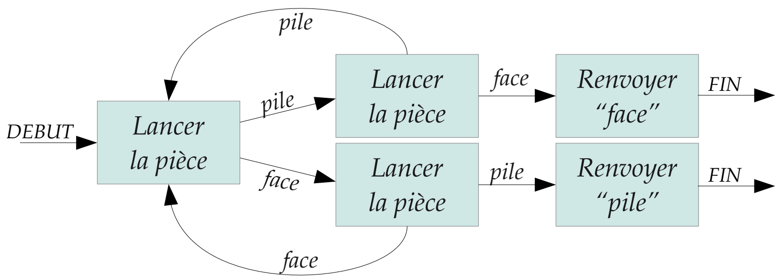
EXERCICE 6 - Loi normale. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et a, b des constantes.

1. Quelle est la loi de $aX+b$?
2. Montrer que pour tout $a>0$ on a $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\exp(-a^2/2)}{a\sqrt{2\pi}}$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[e^{tX}]$.

EXERCICE 7 -Projection orthogonale
Soit X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. On dit que X, Y sont *orthogonales* si $\mathbb{E}[XY]=0$.

1. Soit $\mathcal{E}_1$ l'espace vectoriel des variables aléatoires constantes, quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_1$?
2. Soit $\mathcal{E}_2$ l'espace vectoriel engendré par Y (l'ensemble des v.a. $\{aY, a \in \mathbb{R}\}$) quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_2$?

EXERCICE 8 -Détruquer une pièce
On dispose d'une pièce truquée qui renvoie "pile" avec une probabilité p et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann[1] a imaginé l'algorithme suivant :



On note $T \in \{2,4,6,\ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{\text{"pile"}, \text{"face"}\}$ le résultat de l'algorithme.

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?
2. Démontrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(T=2k) = \left(p^2+(1-p)^2\right)^{k-1} 2p(1-p),$$
en déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement : $\mathbb{P}(T<+\infty)=1$.
3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien "pile" ou "face" avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R=\text{"Pile"})=1/2$.
4. (*) Démontrer que $\mathbb{E}[T]=\frac{1}{p(1-p)}$. Imaginer une variante de l'algorithme de von Neumann pour réduire $\mathbb{E}[T]$.

[1] Mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957).