PC 2 (Variables aléatoires réelles)

EXERCICE 1 - Fonctions de répartition

1. Déterminer la densité de e^X où X est une $\mathcal{N}(0,1)$ (on appelle cette loi la loi log-normale).
2. Soit R de densité $x \mapsto \frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Quelle est la loi de $|R|$?

EXERCICE 2 - Saturation et détection

Soit X une v.a. exponentielle de paramètre 1, et a, ε des réels positifs.

1. Déterminer les fonctions de répartition de $Y = \min(X, a)$ et de $Z = X\mathbf{1}_{\{X>\varepsilon\}}$.
2. Y et Z ont-elles une densité ?

EXERCICE 3 - Conditionnement. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure à s euros. On suppose que les offres sont indépendantes et toutes de même densité f.

1. Soit $K \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison, quelle est la loi de K ?
2. Déterminer la loi du prix de vente $X \in [s, +\infty)$ de la maison.

EXERCICE 4 - Loi normale. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$\phi(a) = \mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Il n'est pas possible de calculer explicitement cette intégrale, on cherche à trouver un bon encadrement de $\phi(a)$. En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour tout $a > 0$ on a

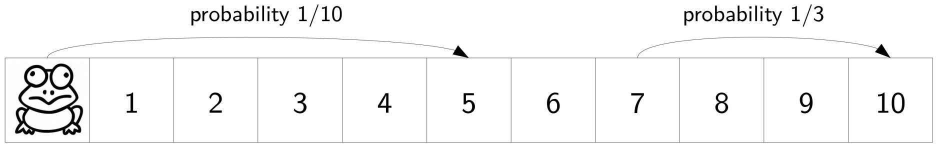
$$\frac{a\exp(-a^2/2)}{(1+a^2)\sqrt{2\pi}} \leq \phi(a) \leq \frac{\exp(-a^2/2)}{a\sqrt{2\pi}}.$$

(Indication : L'inégalité de droite est plus simple. Pour l'inégalité de gauche, on peut partir de $0 \leq \int_a^{+\infty} (x-a)^2 \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx$.

EXERCICE 5 - La grenouille.

(Il s'agit d'une énigme qui était souvent posée en entretien d'embauche en Maths Appliquées, voir https://www.youtube.com/watch?v=ZLTyX4zL2Fc.)

Une grenouille se trouve sur la rive d'une rivière, située en $x = 0$. L'autre rive est située en $x = 10$. Elle saute d'abord à une position uniforme dans $\{1, 2, \ldots, 10\}$ (si elle atteint 10 le processus s'arrête). Ensuite, à chaque étape, si elle se trouve en $y < 10$ elle saute uniformément au hasard dans l'ensemble $\{y+1, \ldots, 10\}$.



Calculer l'espérance du nombre de sauts nécessaires pour traverser la rivière (ou donner une procédure pour le faire avec un ordinateur).

EXERCICE 6 - Loi géométrique

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètre p.

1. Soient $A \geq 1$, $n \geq 1$, calculer

$$\mathbb{P}\Big(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq A\Big).$$

2. Montrer que presque sûrement la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée.

EXERCICE 7 - Une loi max-stable

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et ayant toutes la loi de Fréchet : pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \text{ si } t > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n, et trouver le nombre a_n tel que $\dfrac{M_n}{a_n}$ suit également la loi de Fréchet.