Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 3 - Année 2015

EXERCICE 1 -Saturation et détection

Soit X une v.a. exponentielle de paramètre 1, et a, ε des réels positifs.

1. Déterminer les fonctions de répartition de $Y = \min(X, a)$ et de $Z = X\mathbf{1}_{X>\varepsilon}$.
2. Y et Z ont-elles une densité ?
3. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

EXERCICE 2 - De nouvelles lois.

1. Calculer la densité de e^X où X est une $\mathcal{N}(0,1)$ (on appelle cette loi la loi log-normale).
2. Soit R de densité $f_R(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$. Quelle est la loi de $S = |R|$?
3. Si T suit la loi exponentielle de paramètre 1, quelle est la loi de $\sqrt{T}$?

EXERCICE 3 - Loi normale. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle est la loi de $aX + b$?
2. Montrer que pour tout $a > 0$ on a $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\exp(-a^2/2)}{a\sqrt{2\pi}}$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}[e^{tX}]$. *(On pourra utiliser $tx - \frac{x^2}{2} = -\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}$.)*

EXERCICE 4 -Une loi max-stable

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et ayant toutes la loi de Fréchet : pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$.

On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ la plus grande valeur parmi les n premiers X_i.

2. Déterminer la fonction de répartition de M_n, et trouver le nombre a_n tel que $\dfrac{M_n}{a_n}$ suit également la loi de Fréchet.

EXERCICE 5 - Soit X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable dans un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X, Y sont *orthogonales* si $\mathbb{E}[XY] = 0$.

1. Soit $\mathcal{E}_1$ l'espace vectoriel des variables aléatoires constantes, quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_1$?
2. Soit $\mathcal{E}_2$ l'espace vectoriel engendré par Y (l'ensemble des v.a. $\{aY, a \in \mathbb{R}\}$) quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_2$?

Rappelons que $\pi(X)$ est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}$ si et seulement si $\pi(X) \in \mathcal{E}$ et si pour tout $E \in \mathcal{E}$, $X - \pi(X) \perp E$.

EXERCICE 6 -Inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une variable aléatoire positive telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$ et $\theta \in]0,1[$ une constante.

1. Vérifier que
$$X \leq \theta\mathbb{E}[X] + X\mathbf{1}_{\{X>\theta\mathbb{E}[X]\}}.$$
2. Démontrer l'inégalité de Paley-Zygmund :
$$\mathbb{P}\left(X > \theta\mathbb{E}[X]\right) \geq (1-\theta)^2\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

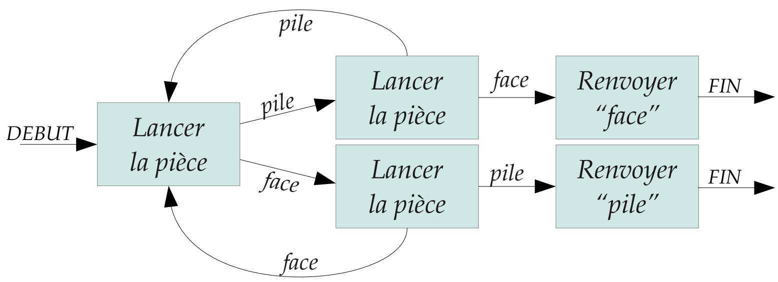
EXERCICE 7 - Médiane

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Montrer que :

1. Si X est à valeurs positives et $k \geq 0$ alors
$$\mathbb{E}(X^{k+1}) = (k+1)\int_0^\infty t^k(1-F(t))dt.$$
2. Pour tout réel a, on a
$$\mathbb{E}(|X-a|) = \int_{-\infty}^a F(x)dx + \int_a^\infty (1-F(x))dx.$$
3. On suppose maintenant que F est continue. Pour quelle(s) valeur(s) a la quantité $\mathbb{E}(|X-a|)$ est-elle minimale ?

EXERCICE 8 -Détruquer une pièce

On dispose d'une pièce truquée qui renvoie "pile" avec une probabilité p et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann[1] a imaginé l'algorithme suivant :



On note T la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{\text{"pile"}, \text{"face"}\}$ le résultat de l'algorithme.

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?
2. Démontrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(T = 2k) = \left(p^2 + (1-p)^2\right)^{k-1} 2p(1-p),$$
en déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement : $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien "pile" ou "face" avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = \text{"Pile"}) = 1/2$.
4. Démontrer que $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p(1-p)}$.
5. (*) Imaginer une variante de l'algorithme de von Neumann pour réduire $\mathbb{E}[T]$.

[1]Mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957).