# PC 3 : Espérances et Vecteurs aléatoires

**Exercice 1** (Calculs d'espérances)**.**

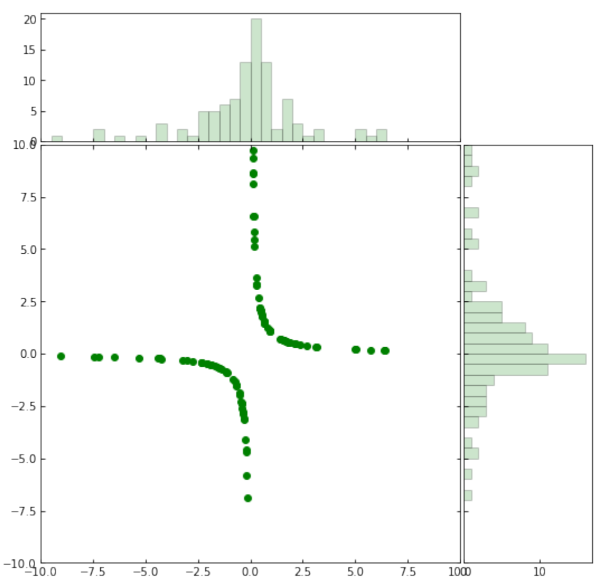
1. Soit $X$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $a$ un paramètre réel. Calculer $\mathbb{E}[e^{aX}]$.
   *(Indication : On pourra utiliser $ax - \frac{x^2}{2} = -\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{a^2}{2}$.)*
2. Pour $\alpha > 1$, soit $Y$ de densité
   $$\frac{\alpha - 1}{y^\alpha}\mathbf{1}_{y\geq 1}.$$
   Pour quels $p$ est-ce que $Y^p$ est intégrable ?
3. Soient $n \geq 1$ et $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $\min\{U_1, U_2, \ldots U_n\}$ et calculer $\mathbb{E}[\min\{U_1, U_2, \ldots U_n\}]$.

**Exercice 2** (Une formule utile)**.** Soit $X$ une variable aléatoire positive, démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

**Indication.** *On peut intervertir espérance et intégrale : pour toute fonction mesurable positive $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}_+$, on a $\int_I \mathbb{E}[f(Y,t)]dt = \mathbb{E}\left[\int_I f(Y,t)dt\right]$.*

**Exercice 3** (Loi de Cauchy)**.** Soit $X$ une variable aléatoire de Cauchy, de densité donnée par $x \mapsto (\pi(1+x^2))^{-1}$. Démontrer que $1/X$ admet une densité, et la calculer en utilisant la méthode de la fonction muette.




*Au centre : $N = 100$ simulations de couples $(X, 1/X)$ où $X$ suit la loi de Cauchy. Sur les côtés : histogrammes des projections.*

**Exercice 4** (Égalités en loi)**.** Soient $X$, $Y$ et $Z$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que $X$ et $Y$ ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que $X$ et $Y$ ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires $XZ$ et $YZ$ n'ont pas nécessairement la même loi.

**Exercice 5** (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive.

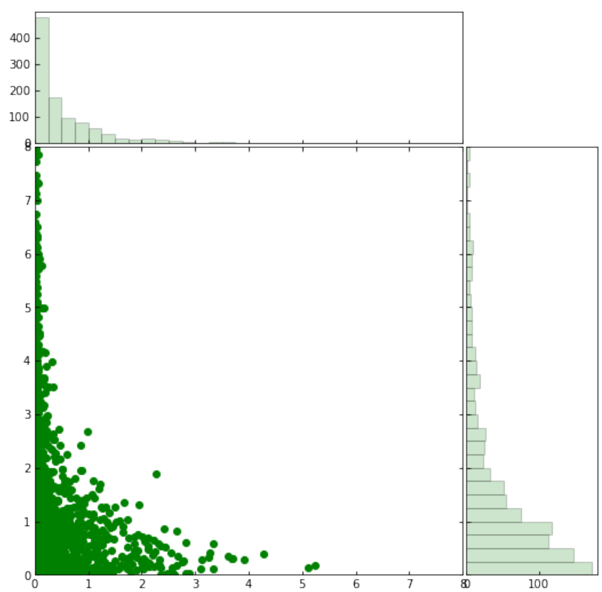
1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\mathbb{E}(X) + X\,\mathbb{1}_{\{X>\lambda\mathbb{E}(X)\}}$.
2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que pour tout $\lambda \in ]0,1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

**Exercice 6** (Couples et densités)**.** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-x(1+y^2)}\,\mathbb{1}_{x,y\geq 0}\,.$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.




*Au centre : $N = 1000$ simulations de couples $(X, Y)$ suivant la densité ci-dessus. Sur les côtés : histogrammes des projections.*

**Exercice 7** (Espérance et minimisation)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F$. Montrer que pour tout réel $a$, on a

$$\mathbb{E}(|X-a|) = \int_{-\infty}^{a} F(x)dx + \int_{a}^{\infty} (1-F(x))dx.$$

*Indication : Partir du terme de droite et écrire $F(x)$ comme une espérance.*
On suppose maintenant que $F$ est continue et bijective. Pour quelle valeur $a$ la quantité $\mathbb{E}(|X-a|)$ est-elle minimale ?