Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 4 - Année 2015

Lucas Gerin

Inégalités, Vecteurs aléatoires

EXERCICE 1 -Inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

1. Montrer $X \leq \theta\mathbb{E}[X] + X\mathbf{1}_{\{X>\theta\mathbb{E}[X]\}}$
2. En supposant de plus que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$, montrer que pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}\left(X > \theta\mathbb{E}[X]\right) \geq (1-\theta)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

EXERCICE 2 -Une inégalité de dispersion

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes admettant des densités notées f et g. On suppose que X et Y sont intégrables et centrées : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$.

1. Démontrer que pour tout x réel,

$$\mathbb{E}[\ |x - Y|\ ] \geq |x|.$$

2. En déduire que

$$\mathbb{E}[\ |X - Y|\ ] \geq \mathbb{E}[|X|].$$

EXERCICE 3 - Loi normale

Soit X, Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ *(les questions sont indépendantes)*.

1. Démontrer que pour tout réel t,

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \exp(t^2/2).$$

(On pourra utiliser l'égalité $tx - \frac{x^2}{2} = -\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}$.)

2. Démontrer que $(X+Y)/\sqrt{2}$ suit également la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

EXERCICE 4 -Une loi max-stable

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et ayant toutes la loi de Fréchet : pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$.

On note $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ la plus grande valeur parmi les n premiers X_i.

2. Déterminer la fonction de répartition de M_n, et trouver le nombre a_n tel que $\dfrac{M_n}{a_n}$ suit également la loi de Fréchet.

EXERCICE 5 - Loi du χ^2 et grandes déviations
La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi de $X = \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$ où les ε_i sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette loi permet de construire des *tests statistiques*, il est alors important de savoir estimer la taille des fluctuations de X autour de son espérance.

1. Quelle est l'espérance et la variance de X ? En déduire que

$$\mathbb{P}(|X-n| > \sqrt{n}\,x) \leq \frac{1}{x^2}. \tag{1}$$

On admet que X a pour densité $\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} 1_{x>0}$ où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On pourra noter $c_n = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

2. Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda X})$ et en déduire l'inégalité pour tout $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}(X > (1+\delta)n) \leq e^{-nL(\lambda)} \quad \text{avec } L(\lambda) = (1+\delta)\lambda + \frac{1}{2}\log(1-2\lambda).$$

3. Comment choisir λ dans l'inégalité précédente pour obtenir le meilleur résultat ? En déduire que

$$\mathbb{P}(X > (1+\delta)n) \leq e^{-n\phi(\delta)} \leq e^{-n(\delta^2/4-\delta^3/6)} \quad \text{avec } \phi(\delta) = \frac{1}{2}(\delta - \log(1+\delta)).$$

4. En répétant le même raisonnement en remplaçant λ par $-\lambda$ montrez que

$$\mathbb{P}(X < (1-\delta)n) \leq e^{-n\psi(\delta)} \leq e^{-n\delta^2/4} \quad \text{avec } \psi(\delta) = -\frac{1}{2}(\delta + \log(1-\delta)).$$

5. En déduire pour tout $x > 0$ l'inégalité de déviation

$$\mathbb{P}(|X-n| > \sqrt{n}\,x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6\sqrt{n}}\right).$$

   Comparer avec (1).

EXERCICE 6 -Projections orthogonales
L'ensemble de variables aléatoires de carré intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ forme un espace vectoriel, noté $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont *orthogonales* si $\mathbb{E}[XY] = 0$.

1. Soit $\mathcal{E}_1$ le sous-espace vectoriel des variables aléatoires constantes. Quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_1$?
2. Soit $\mathcal{E}_2$ l'espace vectoriel engendré par Y. Quelle est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}_2$?

Rappelons que $\pi(X)$ est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{E}$ si $\pi(X) \in \mathcal{E}$ et si pour tout $E \in \mathcal{E}$, $X - \pi(X)$ est orthogonale à E.