PC 4 : Vecteurs aléatoires à densités - Simulations

(In-)dépendance

Exercice 1. (Couples de variables aléatoires) Soit (X, Y) de densité

$$\frac{3}{4} \exp\left(-|x+2y| - |x-y|\right).$$

Déterminer la loi de $X + 2Y$.

Exercice 2. (Covariance d'un pile ou face) Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ des piles ou faces indépendants : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Pour tout $k \leq n$ on pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Déterminer la matrice de covariance du vecteur

$$(S_1, S_2, \dots, S_n).$$

Exercice 3. (Matrice de covariance) Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur aléatoire de matrice de covariance

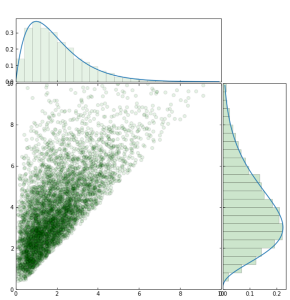
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. En déduire qu'il existe une constante c telle que $X_3 = X_1 + X_2 + c$ p.s.
3. Plus généralement, on considère un vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de matrice de variance covariance Γ.
   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n u_i Y_i) = u^\top \Gamma u$.
   (b) En déduire que si Γ est non-inversible alors l'une des composantes de Y est presque sûrement égale à une fonction affine des autres composantes de Y.
4. Le vecteur (X_1, X_2, X_3) a-t-il une densité ?

Exercice 4 (Espérances conditionnelles)**.** Soit (X, Y) de densité jointe

$$cx(y-x)\exp(-y)\mathbf{1}_{0<x<y}.$$

1. Trouver c et calculer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.



Simulations de 5000 couples (X, Y).

Exercice 5 (Indépendance et permutations)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même densité.

1. Démontrer que, pour tous i, j, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.
2. En déduire que, presque-sûrement, les X_n sont tous distincts deux à deux.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$ et $\mathbb{P}(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_2 < X_3 < X_4\})$.

Simulations

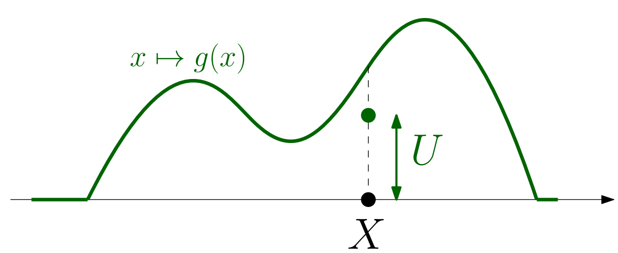
Exercice 6 (Des fonctions mystères)**.** Que simulent les quatre programmes suivants ?
(On rappelle que chaque appel de `numpy.random.rand()` *renvoie un tirage indépendant d'une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle* $[0, 1]$*.)*

```
def SimulationMystere1(x):
   # Entrée : réel 0<x<1
   if numpy.random.rand()<x:
      return 1
   else:
      return 1 + SimulationMystere1(x)

def SimulationMystere2(r,x):
   # Entrées : réel 0<x<1, entier r >0
   vecteur = [numpy.random.rand()<x for s in range(r)]
   return sum(vecteur)

def SimulationMystere3():
   while True:
      A,B = 2*numpy.random.rand()-1 , 2*numpy.random.rand()-1
      if A**2 +B**2 < 1:
         return (A,B)

def SimulationMystere4(k):
   # Entrée : entier k > 0
   tirage = k*numpy.random.rand()
   return int(tirage)
```

Exercice 7 (Simulation)**.** On considère une fonction g, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit (X, U) un couple de variables aléatoires généré par l'algorithme suivant :

— On tire X suivant la densité $\frac{1}{\int g} g$;

— Connaissant X, on tire U suivant une loi uniforme sur $[0, g(X)]$.



1. Vérifier que (X, U) est uniforme sur l'ensemble
$$\mathcal{A} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq u \leq g(x)\right\}.$$
2. Réciproquement, si (X, U) suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$ quelle est la loi de X ?