PC 5 : Densités jointes - Vecteurs gaussiens

Sommes de variables aléatoires, Changements de lois

Exercice 1. (Changement de variables 2d)

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité
$$f(x,y) = \frac{3}{4}\exp\left(-|x+2y| - |x-y|\right).$$
Déterminer la loi jointe de $(X+2Y, X-Y)$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi jointe de $(X, X+Y)$.

Exercice 2. (Une somme aléatoire de variables aléatoires)
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. , $n \geq 1$ un entier et N une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. On suppose que N est indépendante des (X_k) et que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. On pose
$$S = X_1 + \cdots + X_N,$$
calculer $\mathbb{E}[S]$.

Exercice 3. (Convolution), tiré de l'examen 2022
Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ et E une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, on suppose que U est indépendante de E.
Calculer la densité f de la variable aléatoire de $U+E$ (et tracer f rapidement).

Exercice 4. (Deux Gammas)
Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi Gamma de paramètres (α, λ), notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, de densité
$$f_{\Gamma(a,\lambda)}(x) = \Gamma(\alpha)^{-1}\,\lambda^{\alpha}\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x),$$
et Y suivant une loi Gamma de paramètres (β, λ).

1. Donner une densité conjointe de $U = X+Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.
2. Quelles sont les lois de U et de V ? Sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que $\mathbb{E}[\frac{X}{X+Y}] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]}$.

Exercice 5. (Max d'exponentielles)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires

$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

ont la même loi.
(Indication : Commencer par calculer la densité de Y_n, puis montrer par récurrence sur n que Z_n admet la même densité.)

Vecteurs gaussiens

Exercice 6. (Vecteurs gaussiens et espérance conditionnelle) Soit $\binom{X}{Y}$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu = \binom{-1}{2}$ de matrice de covariance

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le vecteur moyenne μ' et la matrice de covariance C' du vecteur gaussien $\binom{X+Y}{2Y-X}$.
2. Quelle est la loi de $X + Y$?
3. Soit a une constante. Calculer $\mathrm{Cov}(Y, X - aY)$, et trouver a telle que Y et $X - aY$ sont indépendantes.
4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.
(Indication : Écrire $X = aY + (X - aY)$, où a est la constante trouvée à la question précédente.)

Exercice 7. (Processus autorégressif), tiré de l'examen 2022
Soit a un réel fixé et $(X_n)_{n\geq 0}$ le processus défini par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (en particulier ε_{n+1} est indépendante de X_n).

1. Pour tout $n \geq 1$, écrire X_n en fonction de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, s_n^2)$ où μ_n et s_n sont à déterminer.
2. Démontrer que le n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ admet une densité sur $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \times \exp\left(-\tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{1}{2}(x_2 - ax_1)^2 - \tfrac{1}{2}(x_3 - ax_2)^2 \cdots - \tfrac{1}{2}(x_n - ax_{n-1})^2\right).$$