Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 5 - Année 2015

Lucas Gerin

Vecteurs aléatoires, (In)dépendance

EXERCICE 1 -Couples de variables aléatoires

1. Soit (X, Y) de densité
$$\frac{2}{\pi}\exp\left(-x(1+y^2)\right)\mathbf{1}_{\{x\geq 0, y\geq 0\}}.$$
Quelle est la loi du couple (X, XY^2) ?
2. Soit (X, Y) de densité
$$\frac{3}{4}\exp\left(-|x+2y|-|x-y|\right).$$
Déterminer la densité de $(X+2Y, X-Y)$.

EXERCICE 2 -Max/Min

Soit X, Y indépendantes, uniformes sur $[0,1]$, on pose $M = \min\{X, Y\}$ et $N = \max\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi jointe de (M, N).
(Indication : écrire pour ϕ continue bornée $\phi(M,N) = \phi(M,N)\mathbf{1}_{X<Y} + \phi(M,N)\mathbf{1}_{X>Y} + \phi(M,N)\mathbf{1}_{X=Y}$.)
2. M et N sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la densité de N puis, pour tout n dans $[0,1]$, la densité conditionnelle de M sachant $N = n$. Démontrer que $\mathbb{E}[M|N] = N/2$.

EXERCICE 3 -Convolution et régularité

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, on suppose que X admet une densité et que Y est une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que $X+Y$ admet une densité.

EXERCICE 4 -Indépendance et permutations

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même densité.

1. Démontrer que, pour tous i, j, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.
2. En déduire que, presque-sûrement, les X_n sont tous distincts deux à deux.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$ et $\mathbb{P}\left(\{X_1 > X_2\} \cap \{X_2 < X_3 < X_4\}\right)$.

EXERCICE 5 -Covariance d'un pile ou face

Soit $X_1, X_2, \ldots X_n$ des piles ou faces indépendants : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Pour tout $k \leq n$ on pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Déterminer la matrice de covariance du vecteur
$$(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$