Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 6 - Année 2016

Vincent Bansaye - Lucas Gerin

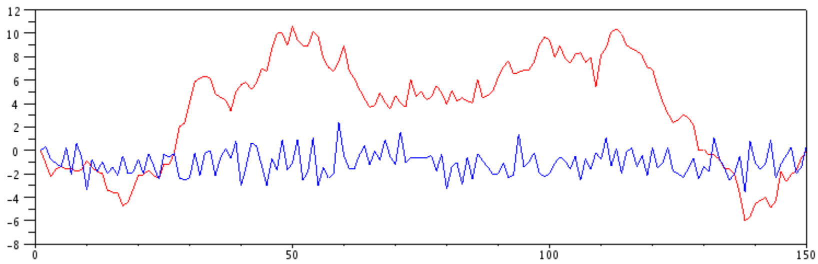
Fonctions caractéristiques, convergence en loi

EXERCICE 1 -(Un processus autorégressif)

Soient a, b deux réels et $(X_n)_{n\geq 0}$ le processus défini par $X_0 = 0$ et

$$X_{n+1} = aX_n + b + \varepsilon_{n+1}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. (en particulier ε_{n+1} est indépendante de X_n).



1. La simulation représente deux trajectoires avec respectivement $(a = 0.99; b = -0.01)$ et $(a = 0.01; b = -0.99)$. Laquelle est laquelle?

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, s_n^2)$ où μ_n, s_n sont à déterminer.

3. En déduire la fonction caractéristique de X_n et trouver pour quels a, b est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.

4. Calculer $\mathrm{cov}(X_n, X_{n+k})$ pour tous n, k. Est-ce que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien?

EXERCICE 2 -(Convergence et minimum)

Soit f la densité de probabilité définie par

$$f(t) = 12t^2(1-t)\mathbf{1}_{t\in[0,1]}.$$

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. de densité f. On pose

$$M_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1. Donner la loi de M_n. Démontrer que $(M_n)_{n\geq 1} \stackrel{\text{prob.}}{\to} 0$, est-ce que (M_n) converge p.s. ?

2. Soit Z une v.a. ayant comme fonction de répartition

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-4t^3) \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Trouver $\alpha > 0$ tel que $(n^\alpha M_n) \stackrel{\text{(loi)}}{\to} Z$.

EXERCICE 3 -(Fonctions caractéristiques et gaussiennes)
Soient X, Y deux $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

1. Donner les fonctions caractéristiques de $X+Y$ et $X-Y$.
2. Démontrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

EXERCICE 4 -(Une somme aléatoire de variables aléatoires)
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. de fonction caractéristique $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, et N une variable aléatoire entière de fonction génératrice $g_N(z) = \mathbb{E}[z^N]$. On suppose que N est indépendante des X_k et que $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, $\mathbb{E}[N] < \infty$. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_N,$$

calculer la fonction caractéristique de S et en déduire $\mathbb{E}[S]$ en fonction de $\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[N]$.

EXERCICE 5 -(Convergence en loi discrète)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$(X_n) \to X \text{ en loi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k) \text{ pour tout } k \geq 0.$$

EXERCICE 6 -(Renormalisation)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et, pour un $\alpha > 0$,

$$Z_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n^\alpha}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n? Écrire sa fonction caractéristique.
2. Trouver $\alpha > 0$ tel que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z non constante.