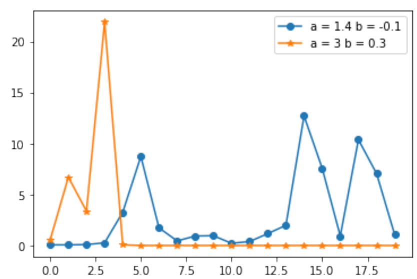
PC 6 : Convergences de variables aléatoires et loi des grands nombres

Différentes convergences

Exercice 1. (Convergence(s) de gaussiennes)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d.. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et, pour toutes constantes a, b,

$$Z_n = \exp(aS_n - bn).$$



Simulations : Deux trajectoires de (Z_n) pour des valeurs différentes de a, b.

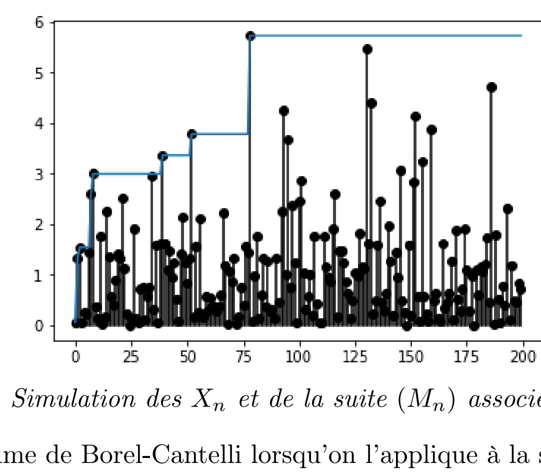
1. En PC3 on a démontré que pour tout réel t, $\mathbb{E}[\exp(tX_1)] = \exp(t^2/2)$. En utilisant cette identité, démontrer que

$$\left((Z_n)_{n\geq 0} \xrightarrow{L^1} 0\right) \qquad \text{si et seulement si} \qquad 2b/a^2 > 1.$$

2. Démontrer que si $b > 0$, $(Z_n)_{n\geq 0} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

Exercice 2. (Borel-Cantelli, convergence et valeurs extrêmes)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On cherche à étudier les valeurs extrêmes de la suite (X_n) : plus précisément étudier le comportement asymptotique de $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$.



Simulation des X_n et de la suite (M_n) associée.

1. Soit $\varepsilon > 0$, que donne le lemme de Borel-Cantelli lorsqu'on l'applique à la suite d'événements

$$A_n = \{X_n > (1+\varepsilon)\log(n)\} \qquad ?$$

2. Que donne le lemme de Borel-Cantelli lorsqu'on l'applique à la suite d'événements

$$B_n = \{X_n \geq \log(n)\} \qquad ?$$

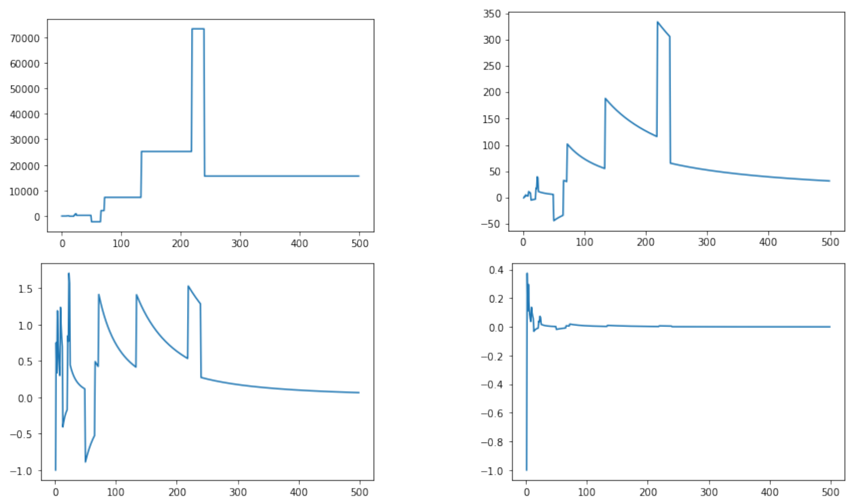
3. Si l'on combine les deux questions précédentes, qu'a-t-on prouvé sur le comportement asymptotique de (M_n) ?

Exercice 3. (Convergence d'une somme)
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $k \geq 1$,

$$X_k = \begin{cases} -k^2 & \text{avec probabilité } \frac{1}{k+1} \\ k^2 & \text{avec probabilité } \frac{1}{k+1} \\ 0 & \text{avec probabilité} 1 - \frac{2}{k+1} \end{cases}.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer, pour tous k, n, $\mathbb{E}[X_k], \mathbb{E}[S_n], \mathrm{Var}(X_k), \mathrm{Var}(S_n)$.
2. Démontrer que pour $k \to +\infty$,
$$(X_k)_{k\geq 1} \overset{\text{(prob.)}}{\to} 0$$
Est-ce que (X_k) converge dans L^1 ? Est-ce que (X_k) converge presque-sûrement ?
3. Sur des simulations (voir des exemples ci-dessous) on observe que (S_n/n) et (S_n/n^2) ne semblent pas converger. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev démontrer que par contre on a
$$\left(\frac{S_n}{n^3}\right)_{n\geq 1} \overset{\text{(prob.)}}{\to} 0.$$

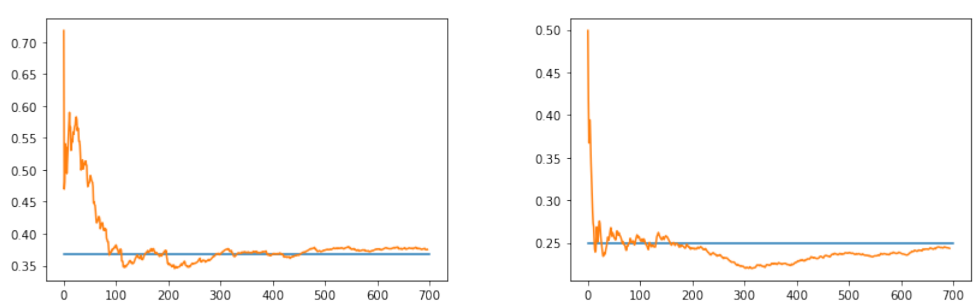


Pour la même simulation, tracés de $(S_n), (S_n/n), (S_n/n^2), (S_n/n^3)$ (attention, les échelles sont très différentes).

Loi des grands nombres

Exercice 4. (Variantes autour de la LFGN)
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Déterminer les limites presque-sûres des suites suivantes :

$$1) \quad P_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/n}. \qquad 2) \quad Q_n = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + \cdots + X_nX_{n+1}}{n}.$$



Des simulations de (P_n) et (Q_n).

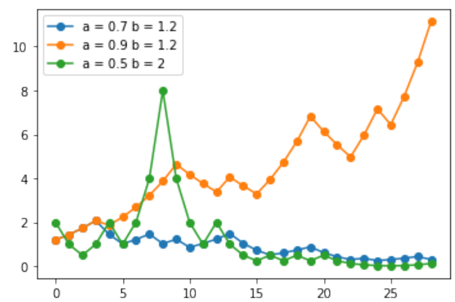
Exercice 5. (Fair Game)

On considère le jeu suivant. Pour deux constantes $a < 1 < b$ fixées on part d'une somme initiale $X_0 = 1$ et à chaque instant la somme est multipliée par a ou b avec probabilité $1/2$, indépendamment du passé. Autrement dit, sachant X_n,

$$X_{n+1} = \begin{cases} aX_n & \text{avec probabilité } 1/2, \\ bX_n & \text{avec probabilité } 1/2. \end{cases}$$

On cherche à savoir pour quels paramètres a, b le jeu est équitable.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
2. Étudier la convergence presque sûre de (X_n).
3. Comment interpréter les résultats ?



Trois trajectoires de X_n pour des (a, b) différents.

Exercice 6. (Applications de la loi des grands nombres) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pourra considérer dans chaque cas des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. et de loi bien choisie, et étudier la convergence de f appliquée à la moyenne empirique.

Exercice 7. (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{R}$) On considère une particule se déplaçant sur l'axe réel, et on note X_n sa position à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X_0 est une v.a. réelle et que la position de la particule évolue de la manière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d., intégrables et de moyenne $m \neq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ presque sûrement.

Exercice 8. (Une jolie preuve de l'inégalité de Jensen)

On rappelle que si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tous $x_1, \ldots, x_n$,

$$\phi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_n)}{n}. \tag{1}$$

Démontrer l'inégalité de Jensen : si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[\phi(X)]$ existent et sont finies :

$$\phi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\phi(X)\right].$$

(Indication : Utiliser (1) et la loi forte des grands nombres.)