PC 7 : Convergence en loi - Théorème Central Limite

Exercice 1. (Convergence et minimum)
Soit f la densité de probabilité définie par

$$f(t) = 12t^2(1-t)\mathbf{1}_{t\in[0,1]}.$$

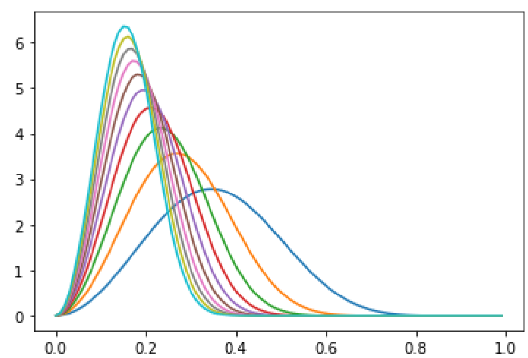
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. de densité f. On pose

$$M_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1. Donner la loi de M_n. Démontrer que $(M_n)_{n\geq 1} \overset{\text{prob.}}{\to} 0$, est-ce que (M_n) converge p.s. ?
2. Soit Z une v.a. ayant comme fonction de répartition

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1-\exp(-4t^3) \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\alpha > 0$ tel que $(n^\alpha M_n) \overset{\text{(loi)}}{\to} Z$.



Les densités de $M_5, M_{10}, M_{15}, \ldots M_{50}$.

Exercice 2. (Convergence en loi discrète)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$(X_n) \to X \text{ en loi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k) \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Exercice 3. (Discret vers continu)
Soit X_n une v.a. de loi uniforme sur $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

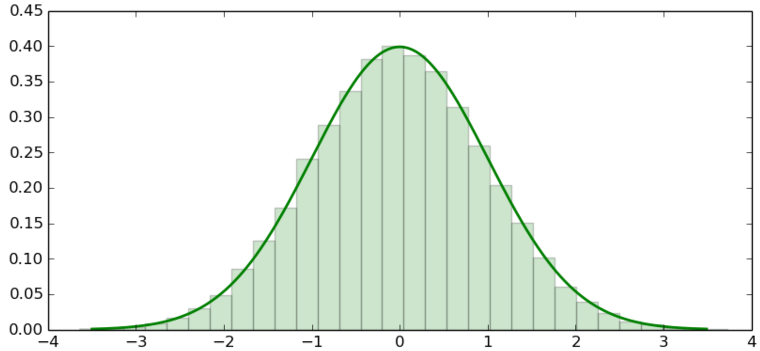
1. Trouver la limite en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. On notera X une v.a. ayant cette loi.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Q})$ ne converge pas vers $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Q})$. Comparer avec la définition de la convergence en loi.

Exercice 4. (Renormalisation)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et, pour un $\alpha > 0$,

$$Z_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n^\alpha}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n ? Écrire sa fonction caractéristique.
2. Trouver $\alpha > 0$ tel que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z non constante.

Exercice 5. (La "loi des douze uniformes")
Une méthode approchée très efficace pour simuler une $\mathcal{N}(0,1)$ consiste à faire la somme de 12 uniformes indépendantes sur $[0,1]$, et soustraire 6. Pourquoi est-ce que ça marche avec douze ?



L'histogramme de 20000 *simulations de* $U_1 + \cdots + U_{12} - 6$, *et la densité de la* $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6. (Somme normalisée)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. d'espérance 0 et de carré intégrable. Quelle est la limite en loi de

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad ?$$

Exercice 7. (TCL et Poisson) Soient $(X_n)_n$ des v.a. i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1.

1. Rappeler la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
2. En utilisant le théorème limite central déterminer la limite de la suite

$$u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 8. (Convergence en loi et densité) Pour tout $n \geq 1$, on définit une fonction F_n sur $[0,1]$ par

$$F_n : x \mapsto x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction F_n (prolongée par 0 pour $x \leq 0$ et par 1 pour $x \geq 1$) est la fonction de répartition d'une variable X_n à densité.
2. Montrer que X_n converge en loi vers une variable à densité X, mais que la densité de X_n ne converge pas au sens de la convergence simple.