PC 8 : Estimation statistique

Méthodes d'estimation

Exercice 1. (Estimation par maximum de vraisemblance)
On suppose que l'on observe les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ *i.i.d.*. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque la loi des variables X_i est :

1. une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
2. une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$,

Exercice 2. (Maximum de vraisemblance vs Méthode des moments)
Soient n variables aléatoires i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$, de densité de Pareto

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}_{x \geq 1},$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer.

1. On suppose d'abord que l'ensemble des paramètres est $\Theta = \{\theta > 1\}$. Estimer θ par la méthode des moments avec $\psi(x) = x$.
2. On suppose maintenant que l'ensemble des paramètres est $\Theta = \{\theta > 0\}$. Expliquer pourquoi la méthode des moments ne fonctionne pas avec $\psi(x) = x$.
3. Pour $\Theta = \{\theta > 0\}$, déterminer l'estimateur par maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n^{EMV}$.
4. Déterminer la loi de $Y_i = \log(X_i)$.
5. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{EMV} - \theta)$.

Exercice 3. (Estimateur efficace) Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires de loi uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$.

1. Determiner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
2. Calculer son biais et sa variance.
3. **(Question vue en cours)** Vérifier que le risque quadratique $\mathbf{R}$ de tout estimateur $\tilde{\theta}$ peut s'écrire sous la forme suivante
$$\mathbf{R} = \mathrm{Var}(\tilde{\theta}) + \left(\mathbb{E}[\tilde{\theta} - \theta]\right)^2.$$
4. Parmi les estimateurs de la forme $c\widehat{\theta}$, $c \in \mathbb{R}$, déterminer c telle que son risque quadratique moyen soit minimum.

Exercice 4. (Estimation optimale de σ^2)
On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec σ^2 inconnue. On cherche à l'estimer par un estimateur de la forme

$$S_c = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{n} X_k^2,$$

où c est un réel positif.

1. Comment choisir c pour que S_c soit sans biais ?
2. On rappelle que $\mathbb{E}[X_1^4] = 3\sigma^4$. Comment choisir c pour que S_c soit de risque quadratique minimal ?

Exercice 5. (Estimation et espérances, tiré de l'examen 2022) Pour tout réel $\theta > -1$ on définit la densité f_θ par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $n \geq 1$. On souhaite estimer le paramètre θ à partir d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires i.i.d. de densité f_θ.

1. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f_θ. Démontrer que $\log(X)$ est une variable intégrable et calculer $\mathbb{E}[\log(X)]$.
2. Vérifier que l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance peut s'écrire
$$\hat{\theta}_n = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)} - 1.$$
3. Démontrer que quand $n \to +\infty$ on a $\hat{\theta}_n \to \theta$ presque sûrement.
4. En utilisant l'inégalité de Jensen, démontrer que l'EMV est biaisé : pour tout $\theta > -1$ on a $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] > \theta$. (*On peut utiliser sans justification que la variable aléatoire $\hat{\theta}_n$ est intégrable.*)

<u>Méthode Delta</u>

Exercice 6. (Méthode Delta)

Soient $(X_i, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi Exponentielle de paramètre $\theta > 0$, ayant comme densité

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x)\mathbf{1}_{x>0}.$$

On pose $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Donner la loi de $\overline{X}$.
2. Calculer $\mathbb{E}_\theta(1/\overline{X})$ et $\mathbb{V}ar_\theta(1/\overline{X})$.
3. Montrer que $\mathbb{E}_\theta(1/\overline{X})$ tend vers θ quand n tend vers l'infini. Établir la relation
$$\mathbb{E}\left[\left(1/\overline{X} - \theta\right)^2\right] = \mathbb{V}ar\left[1/\overline{X}\right] + \left[\mathbb{E}\left(1/\overline{X}\right) - \theta\right]^2,$$
4. En déduire que $\mathbb{E}\left[\left(1/\overline{X} - \theta\right)^2\right] \to 0$ quand n tend vers l'infini.
5. Montrer que $1/\overline{X}$ converge en probabilité vers θ quand n tend vers l'infini.
6. Donner la loi limite de $\sqrt{n}\left(\overline{X} - 1/\theta\right)$ puis celle de $\sqrt{n}\left(1/\overline{X} - \theta\right)$.