Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 9 - Année 2016

Vincent Bansaye - Lucas Gerin

Statistiques (Tests) & Files d'attente

EXERCICE 1 -Pogba indispensable ?

Sur les saisons 2013-14 à 2015-16, on constate que la Juventus obtient des meilleurs résultats quand Paul Pogba joue. On cherche à savoir si cette différence est significative.

	Défaite	Match nul	Victoire	Total
Avec Pogba	5	18	57	85
Sans Pogba	6	10	18	29
Total	11	28	75	114

Pour effectuer un test statistique, on fait le modèle suivant : le tableau ci-dessus est la réalisation de 114 couples (R, P) où $R \in \{D, N, V\}$ désigne le résultat et $P \in \{0, 1\}$ la présence/absence de Pogba.

Effectuer le test[1] du χ^2 d'indépendance au niveau 5% de l'hypothèse H_0 : "R et P sont indépendantes" contre $H_1 =$ non H_0. On donne les quantiles suivants pour un χ^2 :

degré de libertés	1	2	3	4	5	6
$F^{-1}(0.95)$	3,84	5,99	7,81	9,94	11,07	12,59

EXERCICE 2 -Un calcul de puissance

On suppose que l'on dispose d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0;\theta]$ pour $\theta \geq 1$. On souhaite tester $H_0 =$ "$\theta \in \Theta_0 = \{1\}$" contre $H_1 =$ "$\theta \in \Theta_1 = (1, +\infty)$".

On considère le test suivant : pour un seuil $s > 0$, on rejette si $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \geq s$.

1. Déterminer s pour que ceci donne un test de niveau 5%.
2. Calculer la fonction de puissance de ce test :

$$\begin{array}{rcl} \text{Puiss : } \Theta_1 & \rightarrow & [0,1] \\ \theta & \mapsto & \mathbb{P}_\theta(\text{ on rejette } H_0). \end{array}$$

EXERCICE 3 -File d'attente saturée

On suppose qu'une file d'attente $(Z_t)_{t\geq 0}$ évolue de la façon suivante :

$$Z_{t+1} = (Z_t + Y_{t+1})^+ ,$$

où les Y_t sont i.i.d. et valent $\{+1, -1\}$ avec proba $p/1-p$, pour $p > 1/2$. On note α_k la probabilité que la file d'attente touche un jour zéro, en partant de $Z_0 = k$. Démontrer que

$$\alpha_k = p\alpha_{k+1} + (1-p)\alpha_{k-1},$$

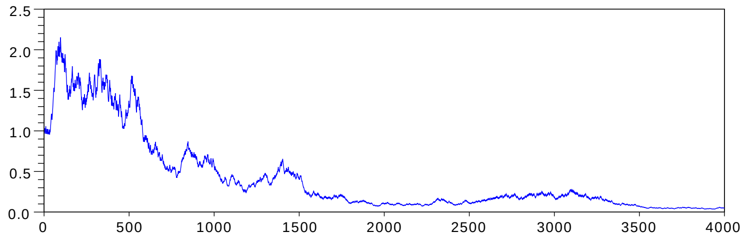
et en déduire la valeur de α_k pour tout k.

[1] Lorsque vous pensez avoir la bonne formule pour la statistique de test, vous pouvez demander au chargé de PC la valeur numérique...

Révisions

EXERCICE 4 -Not-so-fair game

Soit $0 < a < 1$, et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 = 1-a) = \mathbb{P}(Y_1 = 1+a) = 1/2$. On pose $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$, voici une simulation de (X_n), avec $a = 0.03$:



1. Montrer que (X_n) converge presque sûrement, que vaut sa limite ?
2. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et montrer que (X_n) ne converge pas en moyenne.

EXERCICE 5 -Convolution et régularité

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, on suppose que X admet une densité et que Y est une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que $X + Y$ admet une densité.

EXERCICE 6 -Densité et permutation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant une densité. Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$.

EXERCICE 7 -Conditionnement et loi de Poisson

Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.

1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = \ell$. Reconnaître cette loi.
3. En déduire $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2 = \ell)$ puis $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2)$.