Projet de simulation MAP311 Lucas Gerin : gerin@cmap.polytechnique.fr

Diffusion d'un liquide dans un tuyau poreux

Mots-clés : Graphes, Modélisation, Probabilités conditionnelles, ...

Le but de ce mini-projet est d'étudier dans des questions théoriques **(T)** et expérimentales **(E)** la vitesse de diffusion d'un liquide dans un tuyau poreux, que nous modéliserons par un graphe très simple.

1 Construction et simulation du modèle

On considère le graphe infini $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ en forme d'"échelle", c'est-à-dire que l'on met une arête entre les points

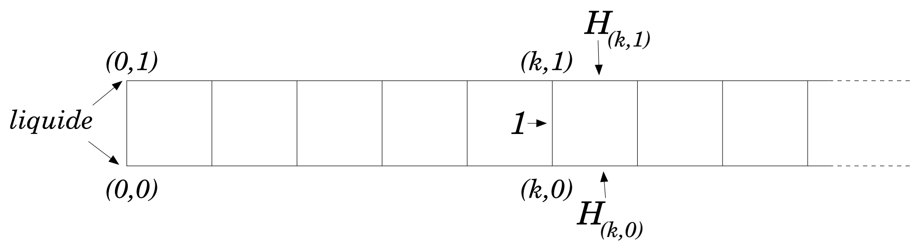
- $(k,1) \leftrightarrow (k+1,1)$ et $(k,0) \leftrightarrow (k+1,0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (les arêtes *horizontales*),
- $(k,0) \leftrightarrow (k,1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (les arêtes *verticales*).

On modélise de façon aléatoire la porosité du tuyau de la façon suivante. Soit $p \in [0,1]$, on se donne une famille de variables aléatoires i.i.d. $(H_{k,\delta})_{k\in\mathbb{Z},\delta\in\{0,1\}}$ telles que :

$$H_{k,\delta} = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } p, \\ 1 & \text{avec probabilité } 1-p. \end{cases}$$

La variable $H_{k,\delta}$ est interprétée comme le *temps* que met le liquide pour aller du point (k,δ) à $(k+1,\delta)$. On suppose pour simplifier que la porosité des arêtes verticales n'est pas aléatoire : le liquide met toujours un temps 1 pour aller de (k,δ) à $(k,1-\delta)$.

On suppose que l'on injecte en continu du liquide aux points $(0,0)$ et $(0,1)$, on cherche à étudier le temps que met le liquide à atteindre le point $(n,0)$, pour n grand.



Pour $k \in \mathbb{Z}, \delta \in \{0,1\}$, on note $T_{k,\delta} \in \mathbb{N}$ le temps que met le liquide à atteindre (k,δ).

1. **(T)** On a par définition $T_{0,0} = T_{0,1} = 0$, justifier que pour $k \geq 1$

$$T_{k,\delta} = \min\{\ T_{k-1,\delta} + H_{k-1,\delta}\ ,\ T_{k,1-\delta} + 1\ \}\,.$$

Solution: Lorsque le liquide arrive en (k,δ), soit il vient de $(k-1,\delta)$, soit de $(k,1-\delta)$.

2. **(E)** En fixant p, simuler et tracer plusieurs trajectoires de $k \mapsto T_{k,0}$.

2 Calcul de la vitesse asymptotique

On a bien sûr pour tout n, par définition du modèle, $n \leq T_{n,0} \leq 2n$, on s'attend à ce que $T_{n,0}/n$ converge vers une constante, dans un sens à préciser.

Dans un premier temps, on se limite à la convergence de l'espérance. On cherche à calculer et montrer l'existence de la limite

$$\mu_p = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[T_{n,0}]}{n}.$$

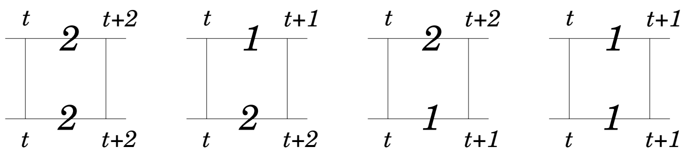
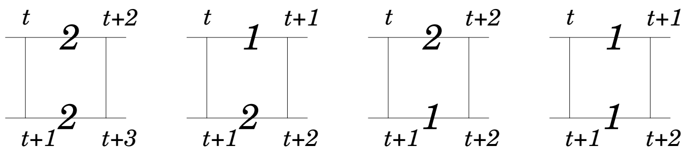
Pour cela on pose, pour $k \geq 0$, $\Delta_k = T_{k,0} - T_{k,1} \in \{-1, 0, 1\}$. Remarquons que Δ_k est indépendante de $H_{k,0}$ et $H_{k,1}$.

3. **(T)** Justifier que pour tout k on a $\mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \mathbb{P}(\Delta_k = -1)$.

> **Solution:** On a une symétrie parfaite du problème (condition initiale comprise) et du coup :
>
> $$\{T_{k,\delta}\}_{k,\delta} \overset{\text{loi}}{=} \{T_{k,1-\delta}\}_{k,\delta}.$$
>
> En particulier
>
> $$T_{k,0} - T_{k,1} \overset{\text{loi}}{=} T_{k,1} - T_{k,0}.$$

4. **(T)** Calculer $\mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 1|\Delta_k = 0)$ et $\mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 0|\Delta_k = 1)$, en déduire l'expression exacte de $\mathbb{P}(\Delta_k = 1)$. Conclure que pour tout $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$

$$\mathbb{P}(\Delta_k = \varepsilon) \overset{k\to+\infty}{\to} 1/3.$$

> **Solution:** Supposons que $\Delta_k = 0$. On fixe $T_{k,1} = T_{k,0} = t$, les 4 cas sont dans le dessin suivant :
>
> 
>
>
> On voit que $\mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 1|\Delta_k = 0) = p(1-p)$ (deuxième cas ci-dessus).
> Si on suppose que $\Delta_k = 1$, les cas sont :
>
> 
>
>
> et $\mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 0|\Delta_k = 1) = p(1-p)$ (troisième cas).
> On a ainsi
>
> $$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 0) & = & \mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 1|\Delta_k = 1)\mathbb{P}(\Delta_k = 1) & + & \mathbb{P}(\Delta_{k+1} = 1|\Delta_k = 0)\mathbb{P}(\Delta_k = 0) \\ x_{k+1} & = & (1 - p(1-p))\, x_k & + & p(1-p)(1 - 2x_k), \end{array}$$
>
> où l'on a noté $x_k = \mathbb{P}(\Delta_k = 1)$ et utilisé la symétrie vue au-dessus : $2\mathbb{P}(\Delta_k = 1) + \mathbb{P}(\Delta_k = 0) = 1$. La suite (x_k) est donc une suite arithmético-géométrique, on la résout facilement :
>
> $$\mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \mathbb{P}(\Delta_k = -1) = x_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(1 - 3p(1-p)\right)^k.$$

5. **(T)** Vérifier que, pour tout k,

$$T_{k+1,0} = T_{k,0} + H_{k,0} - \mathbf{1}_{\Delta_k=1, H_{k,0}=2, H_{k,1}=1}.$$

> **Solution:** Dans les 8 cas dessinés à la question précédente, on peut vérifier que l'on a toujours $T_{k+1,0} = T_{k,0} + H_{k,0}$, sauf sans le deuxième cas en bas. On a alors
>
> $$T_{k+1,0} = T_{k,0} + H_{k,0} - 1.$$

6. **(T)** En passant à l'espérance dans la formule précédente, démontrer que la limite μ_p existe et que

$$\mu_p = 1 + \frac{2p + p^2}{3}.$$

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[T_{n,0}] &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[H_{k,0}] - \mathbb{P}\big(\Delta_k = 1, H_{k,0} = 2, H_{k,1} = 1\big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 + p - \mathbb{P}(\Delta_k = 1)p(1-p) \\ &= 1 + p - p(1-p)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\Delta_k = 1) \overset{n\to+\infty}{\to} 1 + p - p(1-p)/3\end{aligned}$$
>
> en utilisant Césaro (rappelons que Δ_k est indépendante de $H_{k,0}$ et $H_{k,1}$).

7. **(E)** On cherche à vérifier expérimentalement la formule précédente. Pour chaque $p = 1/10, 2/10, \dots, 9/10$, simuler s fois la variable aléatoire $T_{n,0}/n$ (on prendra s de l'ordre de quelques dizaines et n de l'ordre de quelques centaines). Tracer la courbe obtenue en fonction de p et comparer avec la courbe théorique.

3 Étude expérimentale des fluctuations

Il est possible de démontrer, mais cela dépasse le cadre de ce cours, que la suite $T_{n,0}$, bien que n'étant pas une somme de variables i.i.d., vérifie une Loi des grands nombres et un Théorème central limite. Précisément, il existe $\sigma_p > 0$ tel que

$$\frac{T_{n,0} - n\mu_p}{\sqrt{n}} \overset{\text{(loi)}}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma_p^2).$$

Nous allons vérifier expérimentalement cette dernière affirmation.

8. **(E)** Fixer n (de l'ordre de la centaine) et simuler un grand nombre de fois la variable $T_{n,0}$. Tracer l'histogramme des valeurs de $(T_{n,0} - n\mu_p)/\sqrt{n}$ obtenues par cette simulation et, sur le même graphique, tracer la courbe correspondant à la gaussienne de même variance. Interpréter graphiquement le résultat.

9. **(T)-(E)** Comment faire pour obtenir une estimation de σ_p ? (Pour cette question il n'est pas demandé une preuve rigoureuse.) Pour $p = 1/2$, quelle estimation obtenez-vous ?

Solution: Notons $Z_n = \frac{T_{n,0} - n\mu_p}{\sqrt{n}}$. On a (pour n grand)

$$Z_n \approx \mathcal{N}(0, \sigma_p^2).$$

On s'attend donc à ce que (c'est réellement le cas)

$$\mathbb{E}[Z_n^2] \to \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, \sigma_p^2)^2] = \sigma_p^2.$$

On simule donc pour n grand et plein de fois des variables aléatoires Z_n^2 et on estime σ_p^2 par la moyenne empirique.

(Avec 30000 *simulations de* T_{300}*, je trouve* $\sigma_{1/2} \approx 0.4196$ *puis* $\sigma_{1/2} \approx 0.4171$*.)*