Chapitre 3

La loi normale

Université de Paris Ouest

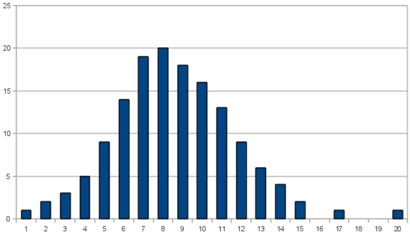
2012–2013

Sommaire

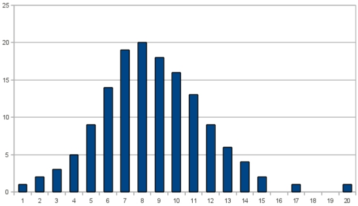
Un exemple pour commencer : Test de mémoire

Étude de la **capacité de mémoire** d'adultes atteints d'une maladie neurologique.
Chaque individu lit 30 mots et doit ensuite en réciter le plus possible.

- Population $\mathcal{P} = \{$ patients atteints de la maladie $\}$
- Variable **quantitative** $X =$ "nombre de mots retenus"
- 2 paramètres μ, σ.



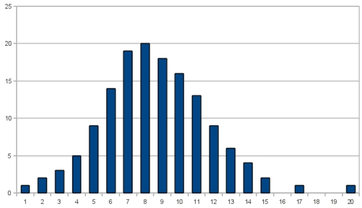
La courbe "en cloche"

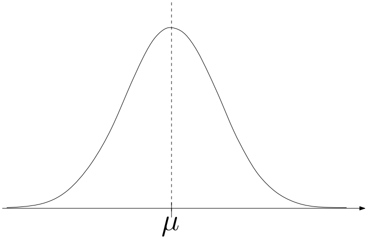


En sciences humaines on observe souvent des distributions

- plutôt **symétriques** autour de μ
- avec une forme de **cloche**

La courbe "en cloche"





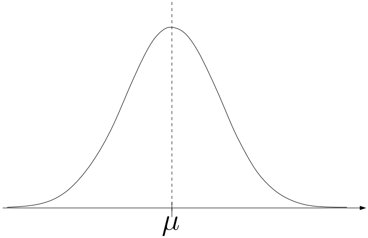
En sciences humaines on observe souvent des distributions

- plutôt **symétriques** autour de μ
- avec une forme de **cloche**

Pour **pouvoir faire des calculs**, on va parfois supposer que X suit une distribution "modèle", appelée **Loi normale**.

Premières propriétés de la loi normale

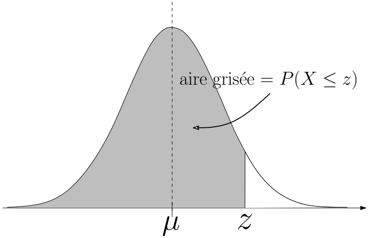
Si X suit cette distribution "modèle", on lui associe une courbe :



- courbe **symétrique** par rapport à μ
- forme de **cloche**

Premières propriétés de la loi normale

Si X suit cette distribution "modèle", on lui associe une courbe :



- courbe **symétrique** par rapport à μ
- forme de **cloche**
- l'aire grisée représente la proportion cumulée

Paramètres de la loi normale

Pour chaque μ, σ, il existe une **loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ**.

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Cas particulier

$\mu = 0$ et $\sigma = 1$: loi normale centrée/réduite.

Paramètres de la loi normale

Pour chaque μ, σ, il existe une **loi normale de moyenne** μ **et d'écart-type** σ.

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Cas particulier

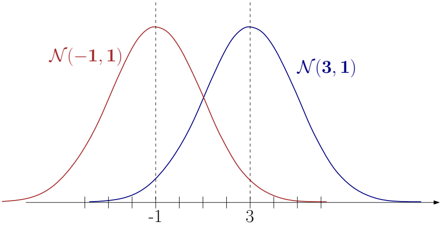
$\mu = 0$ et $\sigma = 1$: loi normale centrée/réduite.

Lorsque l'on suppose qu'une variable X suit le modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on écrit

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$

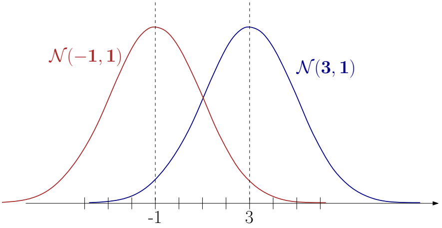
Paramètres de la loi normale

Exemples de lois normales avec **moyennes différentes**, même écart-type :

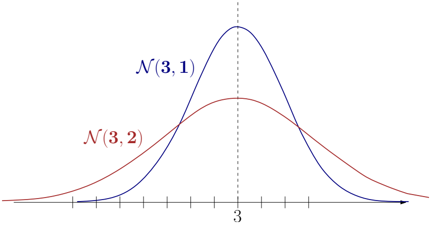


Paramètres de la loi normale

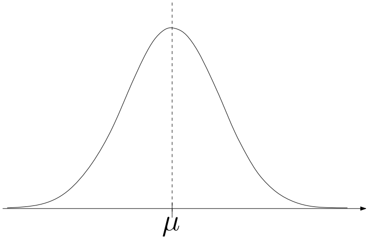
Exemples de lois normales avec **moyennes différentes**, même écart-type :



Exemples de lois normales avec même moyenne, **écart-types différents** :



Pour les plus matheux : l'équation de la courbe



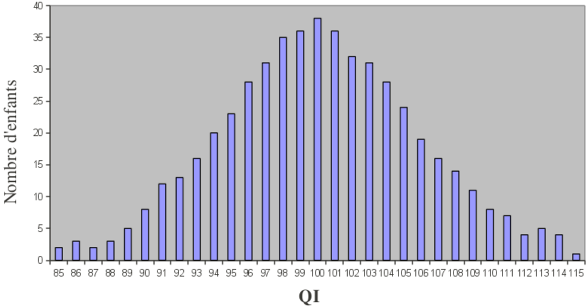
Pour la tracer à la calculatrice/ordinateur,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Cette formule n'est pas utile pour ce cours !

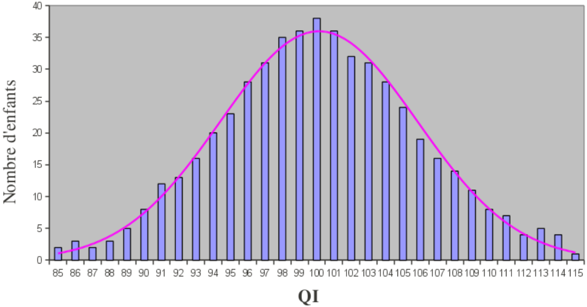
Exemple : QI

Étude sur le **QI** de 515 enfants du même âge, $\mu = 100,1$, $\sigma = 5,7$.



Exemple : QI

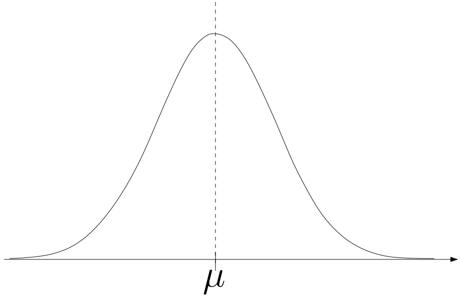
Étude sur le **QI** de 515 enfants du même âge, $\mu = 100,1$, $\sigma = 5,7$.



En rose, courbe de la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 100,1; \sigma = 5,7)$.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$: à retenir

- distribution "modèle" pour des **variables quantitatives continues**
- moyenne μ, écart-type σ
- allure de la courbe :



- aires = proportions cumulées

Sommaire

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1,56$?

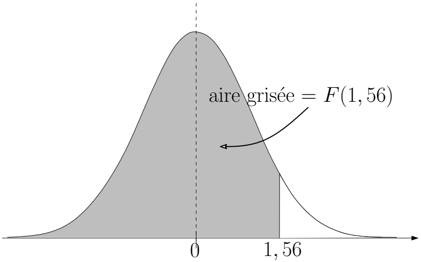
On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1,56$?

On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).



Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1,56$?

On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).
On cherche 1,56 dans **la table** :

	…	0,06	…
⋮			
1,5	…	0.9406	…
⋮			

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 1,56$?

On cherche $P(X \leq 1,56)$ (rappel : on écrit aussi $F(1,56)$).
On cherche 1,56 dans **la table** :

	...	$0,06$	...
$\vdots$			
$1,5$	...	0.9406	...
$\vdots$			

Donc $P(X \leq 1,56) = 0,9406$.
Pour $94,06$ % des individus, la variable X est inférieure à $1,56$.

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \geq 1,49$?

On cherche $P(X \geq 1,49)$.

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \geq 1,49$?

On cherche $P(X \geq 1,49)$. On écrit d'abord

$$P(X \geq 1,49) = 1 - P(X \leq 1,49) = 1 - F(1,49)$$

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \geq 1,49$?

On cherche $P(X \geq 1,49)$. On écrit d'abord

$$P(X \geq 1,49) = 1 - P(X \leq 1,49) = 1 - F(1,49)$$

On cherche 1,49 dans **la table**.

$$\begin{array}{c|ccc} & \dots & \dots & 0,09 \\ \hline \vdots & & & \\ 1,4 & \dots & \dots & 0.9319 \\ \vdots & & & \end{array}$$

Donc $P(X \leq 1,49) = 0,9319$.
Soit $P(X \geq 1,49) = 1 - 0.9319 = 0.0681$.

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$: valeurs négatives

Exemple

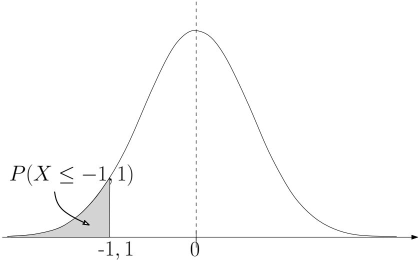
On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq -1,1$?

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$: valeurs négatives

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq -1,1$?

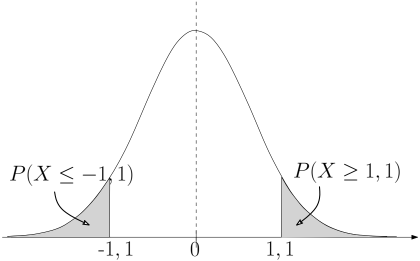
On cherche $P(X \leq -1,1)$, c'est-à-dire $F(-1,1)$.



Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$: valeurs négatives

Exemple

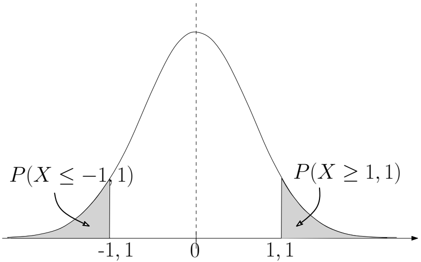
On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq -1,1$?



Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$: valeurs négatives

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq -1,1$?



Mais on sait traiter les $>$:

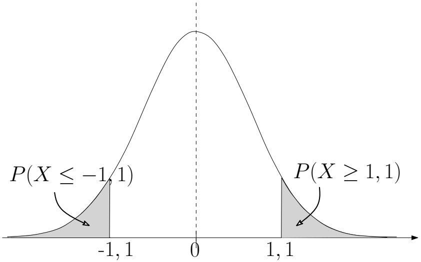
$$\mathbb{P}(X \geq 1,1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1,1) = 1 - 0,8643.$$

Finalement, $\mathbb{P}(X \leq -1,1) = 0,1357$.

Loi normale centrée/réduite $\mathcal{N}(0,1)$: valeurs négatives

À retenir :

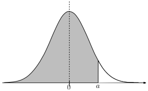
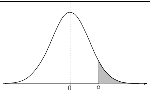
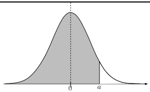
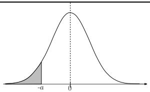
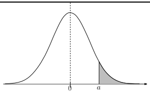
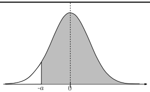
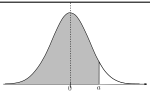
$$F(-a) = 1 - F(a)$$



par exemple : $F(-1,1) = 1 - F(1,1)$.

Calculs avec la $\mathcal{N}(0,1)$, tous les cas

Pour n'importe quel $a > 0$,

I	$\mathbb{P}(X \leq a)$				$\Rightarrow$ table
II	$\mathbb{P}(X \geq a)$		$= \quad 1 \; -$		$\Rightarrow$ cas I
III	$\mathbb{P}(X \leq -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas II
IV	$\mathbb{P}(X \geq -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas I

Loi normale quelconque $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Pour faire des calculs avec une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on se ramène à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi normale quelconque $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Pour faire des calculs avec une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on se ramène à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème

$$\text{Si} \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad \text{alors} \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

On dit que l'on **centre et réduit** X.

Loi normale quelconque $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Pour faire des calculs avec une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on se ramène à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème

$$\text{Si} \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad \text{alors} \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) = Z.$$

On dit que l'on **centre et réduit** X.

On utilise la lettre Z pour désigner une loi normale centrée/réduite.

Un exemple avec une $\mathcal{N}(11; 2)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(11; 2)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 14$?

On cherche $P(X \leq 14)$.

Un exemple avec une $\mathcal{N}(11; 2)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(11; 2)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 14$?

On cherche $P(X \leq 14)$.

- On **centre et on réduit** X : $\frac{X-11}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Un exemple avec une $\mathcal{N}(11; 2)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(11; 2)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 14$?

On cherche $P(X \leq 14)$.

- On **centre et on réduit** X : $\frac{X-11}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 14) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 11}{2} \leq \frac{14 - 11}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z \leq 1,5)\end{aligned}$$

- On cherche $1,5$ dans la table.

Un exemple avec une $\mathcal{N}(11; 2)$

Exemple

On suppose qu'une certaine variable $X \sim \mathcal{N}(11; 2)$. Pour quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 14$?

On cherche $P(X \leq 14)$.

- On **centre et on réduit** X : $\frac{X-11}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
-

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 14) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-11}{2} \leq \frac{14-11}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 1,5) \end{aligned}$$

- On cherche $1,5$ dans la table.

On trouve finalement $P(X \leq 14) = 0,9332$.

Quantile $> 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à $97,5\%$ pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,975$.

Quantile $> 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à $97,5\%$ pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,975$.
On lit la table **à l'envers** :

	$\dots$	$0,06$	$\dots$
$\vdots$			
$1,9$	$\dots$	0.9750	$\dots$
$\vdots$			

Quantile $> 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à $97,5\%$ pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,975$.
On lit la table **à l'envers** :

	$\dots$	$0,06$	$\dots$
$\vdots$			
$1,9$	$\dots$	0.9750	$\dots$
$\vdots$			

Donc $P(X \leq 1,96) = 0,9750$.
Le quantile recherché est donc $1,96$.

Quantile $> 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à $97,5\%$ pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,975$.
On lit la table **à l'envers** :

	...	$0,06$	...
$\vdots$			
$1,9$	...	0.9750	...
$\vdots$			

Donc $P(X \leq 1,96) = 0,9750$.
Le quantile recherché est donc $1,96$.

Notation

Le quantile d'ordre α pour la loi normale centrée/réduite est noté z_α.
Par exemple, $z_{0,975} = 1,96$.

Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple

On cherche le quantile à 14% pour la $\mathcal{N}(0, 1)$.

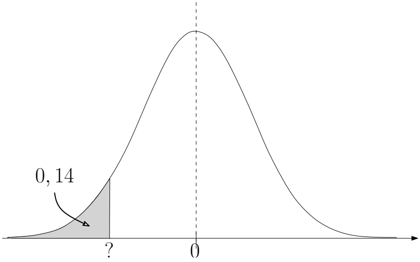
Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0, 14$.

Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à 14% pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,14$.
Il n'y a pas de nombre $< 0,5$ dans la table !

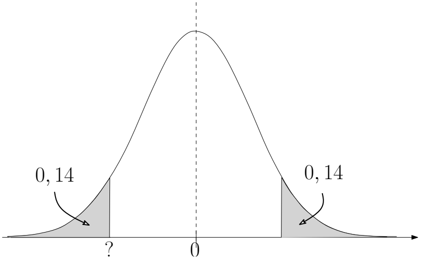


Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à 14% pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,14$.
Il n'y a pas de nombre $< 0,5$ dans la table !

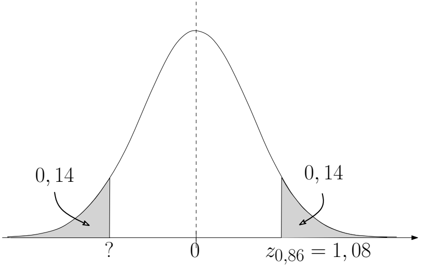


Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à 14% pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,14$.
Il n'y a pas de nombre $< 0,5$ dans la table !

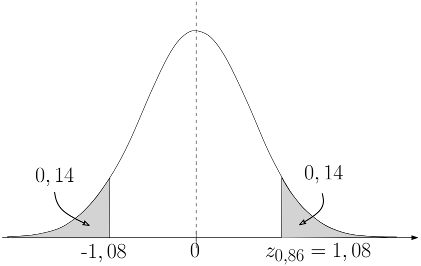


Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

On cherche le quantile à 14% pour la $\mathcal{N}(0,1)$.

Cela revient à trouver a tel que $P(Z \leq a) = 0,14$.
Il n'y a pas de nombre $< 0,5$ dans la table !

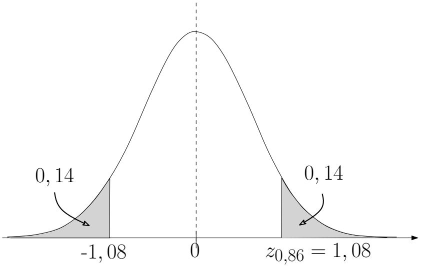


Le quantile est donc $z_{0,14} = -1,08$.

Quantile $< 50\%$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$

À retenir :

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha}$$



par exemple : $z_{0,14} = -z_{0,86}$.

Quantile d'une loi normale quelconque

Notons Q_α le quantile d'ordre alpha d'une **loi normale quelconque** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

À retenir :

$$Q_\alpha = \mu + \sigma \times z_\alpha.$$

On "déréduit" et on "décentre" le quantile de la loi normale centrée/réduite.

Quantile d'une loi normale quelconque

Notons Q_α le quantile d'ordre alpha d'une **loi normale quelconque** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

À retenir :

$$Q_\alpha = \mu + \sigma \times z_\alpha.$$

On "déréduit" et on "décentre" le quantile de la loi normale centrée/réduite.

Exercice

Quel est le quantile à 90% pour une loi normale $\mathcal{N}(11, 2)$?