Durée : 1h30
Documents et calculatrices interdits. Sauf pour l'exercice 1, tous les raisonnements devront être détaillés.
Barème provisoire : 4pts - 6pts - 5,5pts - 3pts - 1,5pts (bonus : 1pt)

Exercice 1 Dessiner, sans justification, les ensembles suivants

A : $\{(x, y)$ tels que : $y \geq 0\}$
B : $\{(x, y)$ tels que : $y \geq -x\}$
C : $\{(x, y)$ tels que : $x \geq 0$ et $y \leq 1\}$
D : $\{(x, y)$ tels que : $x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 2 Calculer les dérivées partielles suivantes :

1. $f(x, y) = 2x + 3y$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$
2. $f(x, y) = 2x + 3y$, calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
3. $f(x, y) = x^2 y$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$
4. $f(x, y) = x^2 y$, calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
5. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
6. $f(x, y) = y \log(x) + x \log(y)$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, décrire l'ensemble de définition en symboles mathématiques, puis dessiner les courbes de niveau demandées.

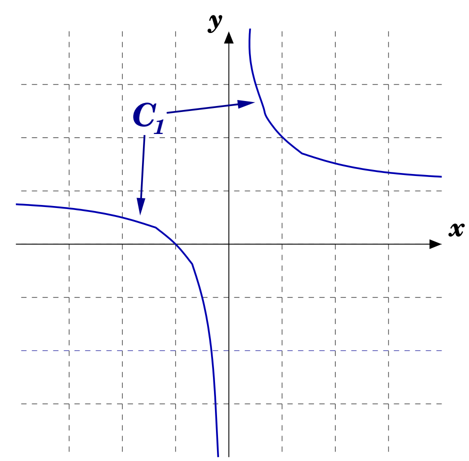
1. $f(x, y) = \frac{x-1}{y+1}$, courbes de niveaux $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.
2. $f(x, y) = (x - 1)(y + 2)$, courbes de niveaux $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$.
3. $f(x, y) = \log x - \log y$, courbe de niveau $\alpha = 0$.

(Si vous dessinez deux courbes sur le même graphique, indiquez précisément à quoi elles correspondent !)

Exercice 4 Soit $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 2x(y + 1)$

1. Calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}.$$
2. Déterminer l'ensemble des points stationnaires de f, c'est-à-dire les (x_0, y_0) tels que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Exercice 5 Trouver une fonction dont la courbe de niveau 1 est représentée par le dessin suivant :



Exercice bonus Trouver une fonction de 2 variables dont le minimum est strictement atteint au point $(1, -1)$, c'est-à-dire telle que pour n'importe quels $(x, y) \neq (1, -1)$ on ait

$$f(x, y) > f(1, -1).$$

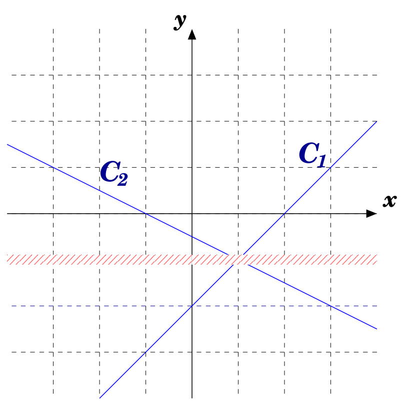
Exercice 1 Facile.

Exercice 2 Calculer les dérivées partielles suivantes :

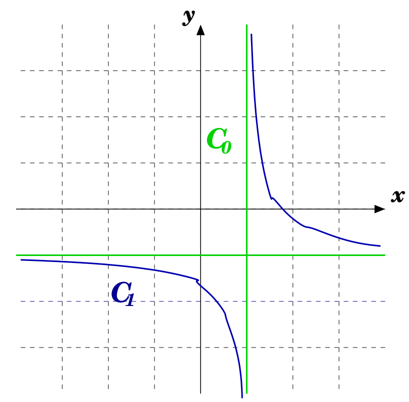
1. $f(x, y) = 2x + 3y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2$
2. $f(x, y) = 2x + 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3$
3. $f(x, y) = x^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$
4. $f(x, y) = x^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$
5. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x/y^3$
6. $f(x, y) = y \log(x) + x \log(y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y/x + \log(y)$

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, décrire l'ensemble de définition en symboles mathématiques, puis dessiner les courbes de niveau demandées.

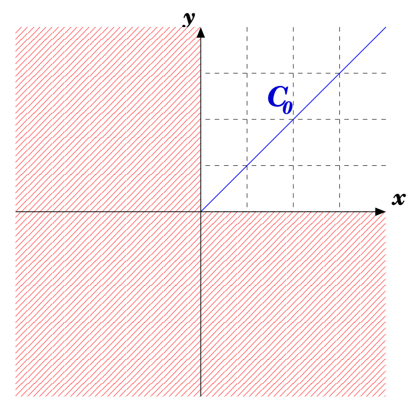
1. $f(x, y) = \frac{x-1}{y+1}$, courbes de niveaux $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.



2. $f(x, y) = (x - 1)(y + 2)$, courbes de niveaux $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$.



3. $f(x, y) = \log x - \log y$, courbe de niveau $\alpha = 0$.



Exercice 4 Soit $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 2x(y + 1)$

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 2y - 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x$. Un seul point stationnaire : $(-1/2; -1/2)$.

Exercice 5 On pouvait prendre par exemple $f(x, y) = (y - 1)x$. On tombe bien sur $y = 1/x + 1$ quand on cherche la courbe de niveau 1.

Exercice bonus La fonction $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$ est strictement positive, sauf pour $(x, y) = (1, -1)$. C'est donc le minimum de f.