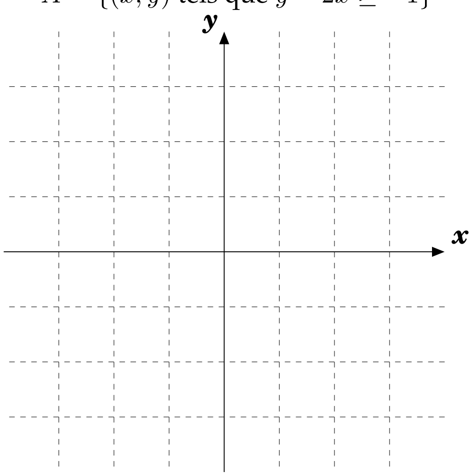
NOM/Prénom : **N° d'étudiant :**

L1 ÉCO-DROIT 2010-11 (Cours de L.Gerin) CONTRÔLE CONTINU - Mathématiques 2

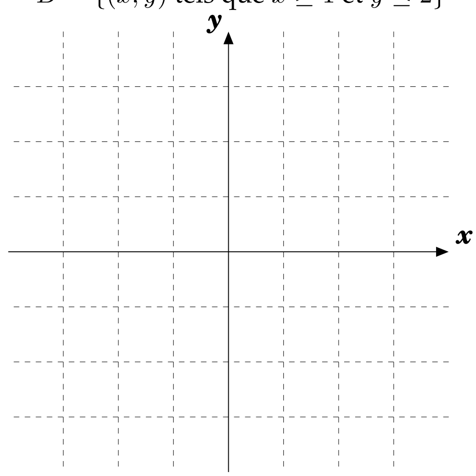
Durée : 1h15. Documents et calculatrices interdits. Vous ne devez rendre **que cette feuille**.

Exercice 1 Dessiner sans justification les ensembles suivants (on pourra par exemple hachurer les parties exclues) :

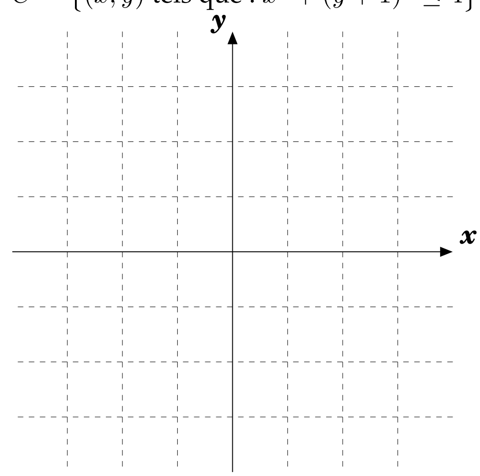
$A = \{(x, y) \text{ tels que } y - 2x \geq -1\}$



$B = \{(x, y) \text{ tels que } x \geq 1 \text{ et } y \leq 2\}$



$C = \left\{(x, y) \text{ tels que : } x^2 + (y+1)^2 \leq 4\right\}$



Exercice 2

question 1 Soit $f(x, y) = 5x + 20y$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 2 Soit $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 3 Soit $f(x, y) = (2x + 3y)^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

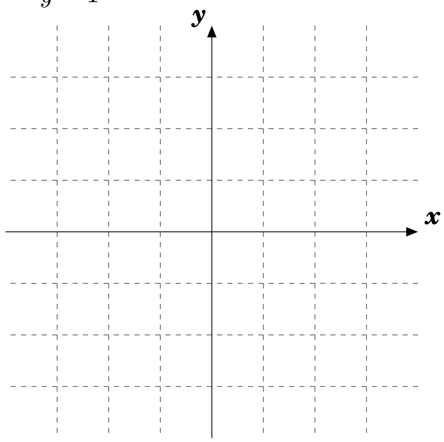
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 4 Soit $f(x, y) = x^5y^2 + 10x + 1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

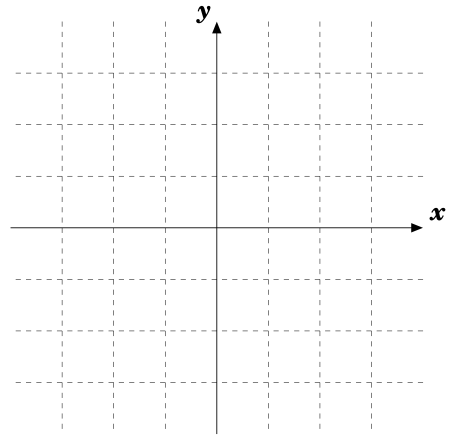
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

Exercice 3 Pour chacune des deux fonctions données, tracer les courbes de niveaux demandées (bien penser à indiquer quelle courbe correspond à quel niveau !) :

$f(x,y) = \dfrac{2x+4}{y-1}$: courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$



$g(x,y) = (x+1)(y-1)$: courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$



Justification et légende éventuelles :

Exercice 4

question 1 Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^2}{2}$. Calculer les dérivées partielles :

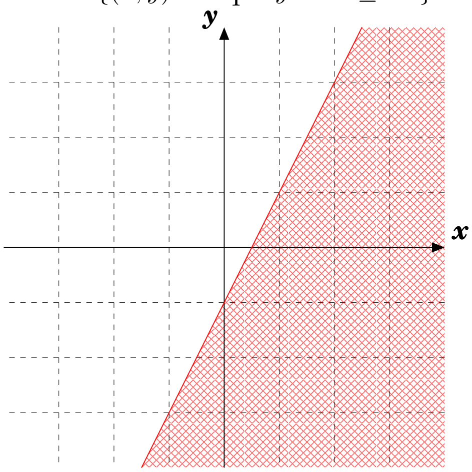
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

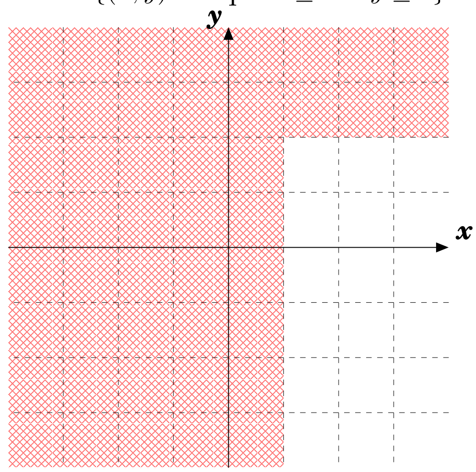
question 2 Déterminer les points stationnaires de f.

Exercice 1

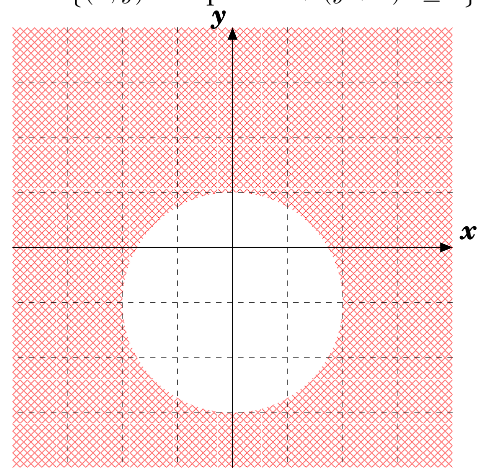
$A = \{(x, y) \text{ tels que } y - 2x \geq -1\}$



$B = \{(x, y) \text{ tels que } x \geq 1 \text{ et } y \leq 2\}$



$C = \{(x, y) \text{ tels que : } x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$



A : On cherche quand est-ce que $y \geq 2x - 1$. On trace d'abord la droite $y = 2x - 1$ (par exemple en prenant deux points $(0, -1)$ et $(1, 1)$. Ensuite pour savoir de quel côté est A il suffit par exemple de prendre $(0, 0)$ et de regarder s'il vérifie $y - 2x \geq -1$ ou pas.

B : On doit avoir $x \geq 1$, ce sont les points à droite de $\{x = 1\}$, et $y \leq 2$, les points sous $\{y = 2\}$.

C : Il faut reconnaître **immédiatement** que $x^2 + (y+1)^2 = 4$ est l'équation d'un cercle et ne surtout pas développer. L'équation d'un cercle est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, où (a, b) est le centre. Ici on trouve $(a, b) = (0, -1)$ et $R^2 = 4$ soit $R = 2$. Pour savoir si on garde l'intérieur ou l'extérieur on peut prendre $(0, 0)$ qui vérifie bien $0^2 + (0 + 1)^2 \leq 4$.

Exercice 2

question 1 On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(5x + 20y) &= \frac{\partial}{\partial x}(5x) + \frac{\partial}{\partial x}(20y) = 5 + 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}(5x + 20y) &= \frac{\partial}{\partial y}(5x) + \frac{\partial}{\partial y}(20y) = 0 + 20.
\end{aligned}$$

question 2 Il faut faire un peu plus attention, le mieux est de sortir immédiatement les "y" quand on dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{1}{y} \times 1 = \frac{1}{y}.$$

Pareil pour y : on sort le x :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = x\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{y} = x \times \frac{-1}{y^2} = \frac{-x}{y^2}.$$

question 3 On peut développer le carré pour être plus tranquille et on se retrouve à dériver $4x^2 + 9y^2 + 12xy$. Sinon il faut se souvenir que $(f(ax + b))' = af'(ax + b)$, ça donne :

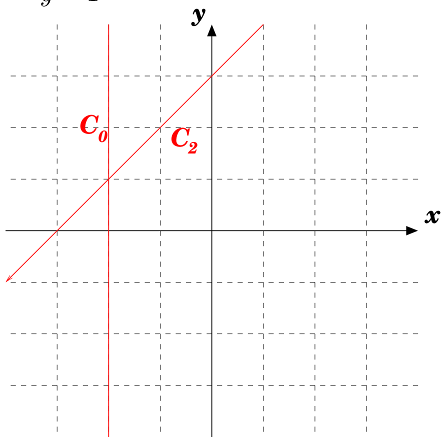
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y)^2 &= 2 \times 2(2x + 3y) = 4(2x + 3y) \\
\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y)^2 &= 3 \times 2(2x + 3y) = 6(2x + 3y).
\end{aligned}$$

question 4 Rien de spécial pour celui-là :

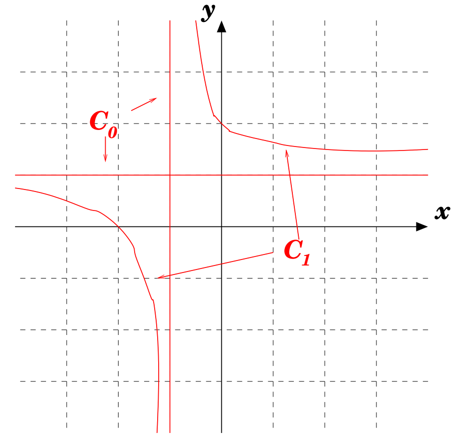
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(x^5y^2 + 10x + 1) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^5y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(10x) + \frac{\partial}{\partial x}(1) = 5x^4y^2 + 10 + 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^5y^2 + 10x + 1) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^5y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(10x) + \frac{\partial}{\partial y}(1) = x^5 2y + 0 + 0.
\end{aligned}$$

Exercice 3

$f(x,y) = \dfrac{2x+4}{y-1}$: courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$



$g(x,y) = (x+1)(y-1)$: courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$



Niveaux de f : Pour $\alpha = 0$, ça donne $2x+4 = 0$ soit $x = -2$. Pour $\alpha = 2$, on cherche les points tels que $2x+4 = 2(y-1)$, c'est-à-dire la droite $y = 3+x$.

Niveaux de g : $\alpha = 0$ quand $x = -1$ ou $y = 1$. Pour le niveau $\alpha = 1$ il faut tracer $y - 1 = \frac{1}{x+1}$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{x} + 1$. Là il vaut mieux connaître par coeur la forme de $y = 1/x$.

Exercice 4

question 1 Aucune difficulté :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2}\right) = x^2 + y + 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2}\right) = 0 + x + y.$$

question 2 On doit résoudre

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 + (-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Il y a donc deux cas :

- $x = 0$ et alors $y = -x = -0 = 0$.
- $x = 1$ et $y = -x = -1$.

On trouve deux points stationnaires : $(0,0)$ et $(1,-1)$.