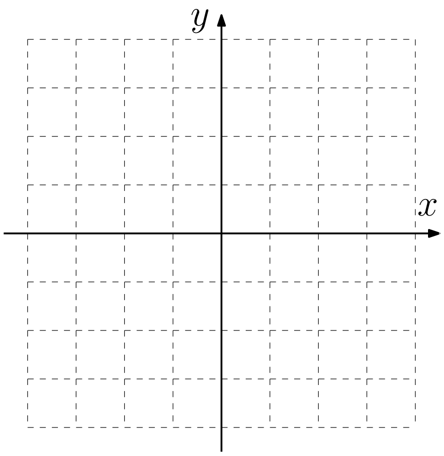
NOM/Prénom : **N° d'étudiant :**

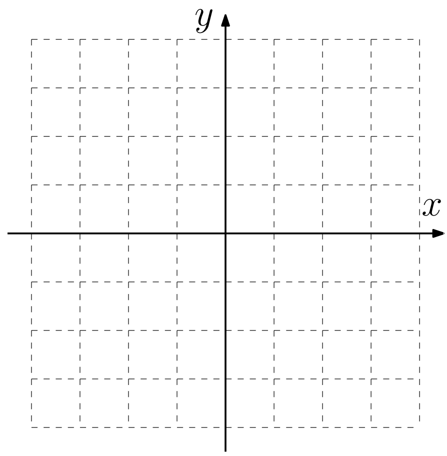
L1 ÉCO-DROIT 2012-13 (Cours de L.Gerin) CONTRÔLE CONTINU - Mathématiques 2

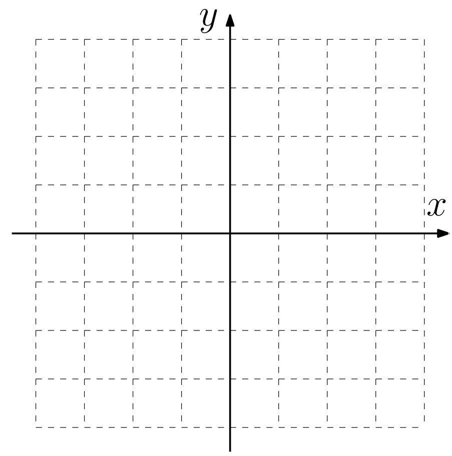
Durée : 1h15. Documents et calculatrices interdits. Vous ne devez rendre **que cette feuille**.

Exercice 1 Dessiner sans justification les ensembles suivants (on pourra par exemple hachurer les parties exclues) :

$A = \{(x, y)$ tels que $(x-2)y \geq 0\}$ $B = \{(x, y)$ tels que $-y + 2x \leq 2\}$ $C = \left\{(x, y)\right.$ tels que : $\left. y - x^2 + 2 \geq 0\right\}$







Exercice 2

question 1 Soit $f(x, y) = \dfrac{x^4}{4} + 5y^3$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 2 Soit $f(x, y) = y^4 \exp(2x)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 3 Soit $f(x, y) = \dfrac{x}{(y+1)^2}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

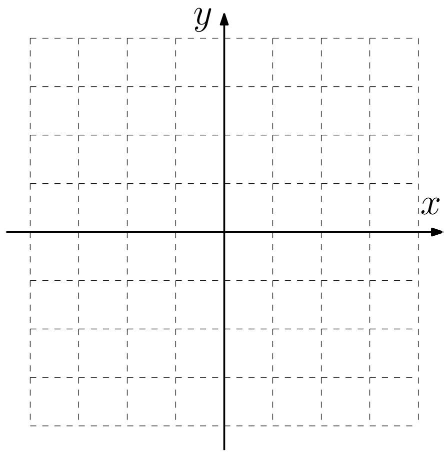
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

question 4 Soit $f(x, y) = (2y + 5x)^5$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$:

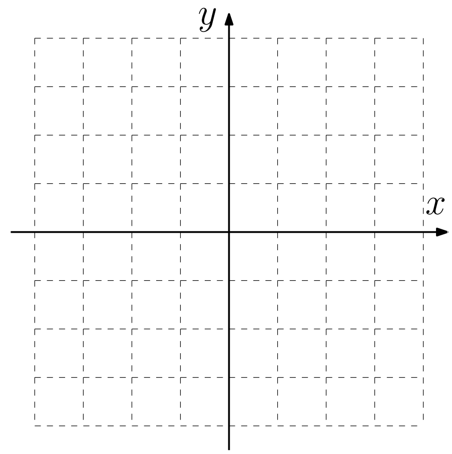
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

Exercice 3 Pour chacune des deux fonctions données :

$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$: Dessiner les courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 4$



$g(x,y) = \log(x) - \log(y)$: Dessiner D_f et la courbe de niveau $\alpha = 0$



Justification et légende éventuelles :

Exercice 4

question 1 Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Calculer les dérivées partielles :

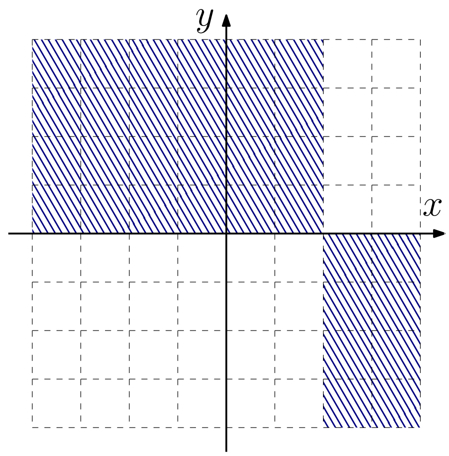
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

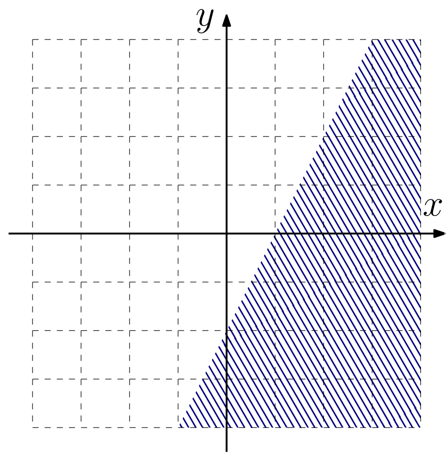
question 2 Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.

Exercice 1

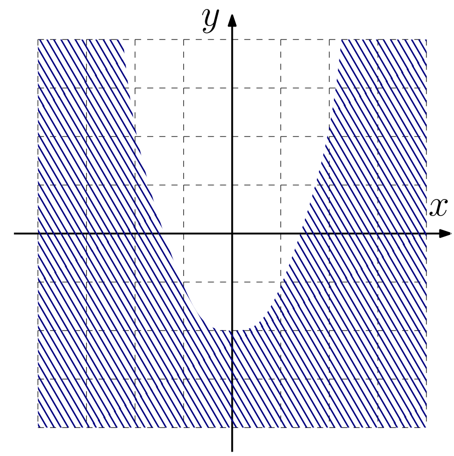
$A = \{(x,y) \text{ tels que } (x-2)y \geq 0\}$



$B = \{(x,y) \text{ tels que } -y+2x \leq 2\}$



$C = \left\{(x,y) \text{ tels que : } y - x^2 + 2 \geq 0\right\}$



Exercice 2

question 1 Soit $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + 5y^3$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \quad x^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad 15y^2$

question 2 Soit $f(x,y) = y^4 \exp(2x)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \quad 2y^4 \exp(2x)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad 4y^3 \exp(2x)$

question 3 Soit $f(x,y) = \dfrac{x}{(y+1)^2}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \quad \dfrac{1}{(y+1)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad \dfrac{-2x(y+1)}{(y+1)^4} = -\dfrac{2x}{(y+1)^3}$

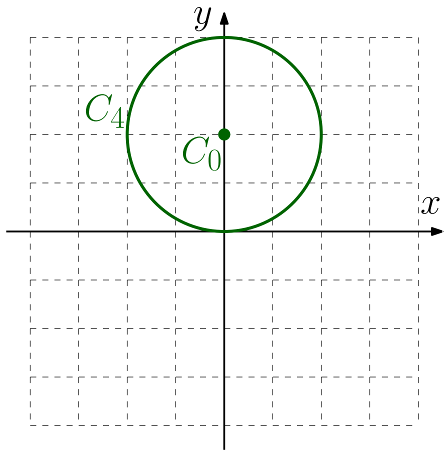
question 4 Soit $f(x,y) = (2y+5x)^5$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \quad 25(2y+5x)^4$

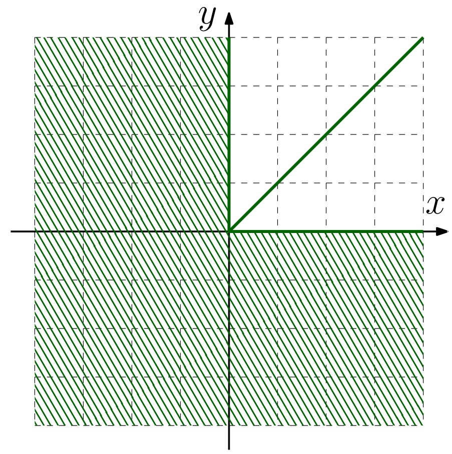
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10(2y+5x)^4$

Exercice 3

$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$: Dessiner les courbes de niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 4$



$g(x,y) = \log(x) - \log(y)$: Dessiner D_g et la courbe de niveau $\alpha = 0$



Fonction f : Pour $\alpha = 4$, ça donne $x^2 + (y-2)^2 = 4 = 2^2$, c'est l'équation du cercle de centre $(0,2)$ et de rayon 2. Pour $\alpha = 0$, c'est l'équation du cercle de centre $(0,2)$ et de rayon 0, c'est donc uniquement le point $(0,2)$.

Fonction g : g est définie lorsque $\log(x)$ et $\log(y)$ le sont, c'est-à-dire lorsque $x > 0$ et $y > 0$. On a $g(x,y) = 0$ quand $\log(x) = \log(y)$, en passant à l'exponentielle des deux côtés cela signifie que $x = y$.

Exercice 4

question 1 Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Calculer les dérivées partielles :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \quad 3x^2 - 3y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad 3y^2 - 3x$

question 2 Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.

On doit résoudre

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

On "injecte" la deuxième ligne dans la première : on remplace x par y^2. On a donc $y^4 = y$, c'est-à-dire $y(y^3 - 1) = 0$. Donc

$$y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y^3 = 1.$$

Mais la seule solution de $y^3 = 1$ est 1. Donc $y = 0$ ou $y = 1$.

Finalement,
- Si $y = 0$ alors $x = y^2 = 0^2 = 0$.
- Si $y = 1$, alors $x = y^2 = 1^2 = 1$.

Il y a donc deux points stationnaires : $(0,0)$ et $(1,1)$.