**Durée : 1h30**
Documents et calculatrices interdits.
**Barème provisoire : 4pts-2pts-5pts-5pts-4pts**

**Exercice 1** On pose

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 2xy + 1.$$

**question 1** Déterminer l'unique point critique de $f$ puis, avec la méthode de la matrice hessienne, trouver si c'est un maximum/minimum local.

**question 2** Montrer que la fonction $f$ est convexe. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 2** On pose $f(x,y) = x^4 + 2y^2$, montrer que $f$ est convexe.

**Exercice 3** Soit $f(x,y) = xy$.

**question 1** Sur le même dessin, tracer les trois courbes de niveau $\alpha = -1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ puis l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $y + 2x = 4\}$.

**question 2** Déterminer le **maximum** de la fonction $f$ sous la contrainte $\{y + 2x = 4\}$ avec la méthode de substitution.

**Exercice 4** Soit

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2.$$

Déterminer l'ensemble des points critiques puis trouver si ce sont des maxima/minima locaux.

**Exercice 5** Pour les fonctions suivantes, tracer les courbes de niveau demandées.

**question 1** $f(x,y) = \frac{y}{x+1}$, niveaux $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

**question 2** $g(x,y) = y - (x+1)^2$, niveaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$.

**question 3** $h(x,y) = x^2 + (y+1)^2$ , niveaux $\alpha = 1$ et $\alpha = 9$.

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

**question 1** On détermine les points critiques de $f$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - 2y &= 0 \\ 4y + 6 - 2x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -2 \end{cases}.$$

Le point $(-1, -2)$ est donc le seul point critique. Pour savoir si c'est un maximum/minimum/ni l'un ni l'autre on commence par calculer la matrice hessienne :

$$\mathrm{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(on remarque qu'elle ne dépend pas de $(x, y)$). Donc pour le point $(-1, -2)$, on a

$$\det \mathrm{Hess}_f(-1, -2) = 2 \times 4 - (-2) \times (-2) = 4$$

qui est positif. Le point $(-1, -2)$ est donc un extremum. Pour savoir si c'est un maximum/minimum on calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) = 2 + 4 > 0.$$

Donc $(-1, -2)$ est un minimum local.

**question 2** La question précédente montre qu'en fait **pour tous les points** $(x, y)$ on a

$$\det \mathrm{Hess}_f(x, y) \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0,$$

d'après le cours cela veut dire que $f$ est convexe.

On en déduit donc que $(-1, -2)$ est le minimum global de $f$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ On calcule les dérivées partielles de $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y.$$

On en déduit les dérivées partielles secondes :

$$\mathrm{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc

**1ère condition :** Pour chaque point $(x, y)$, $\det \mathrm{Hess}_f(x, y) = 48x^2$ qui est positif ou nul.

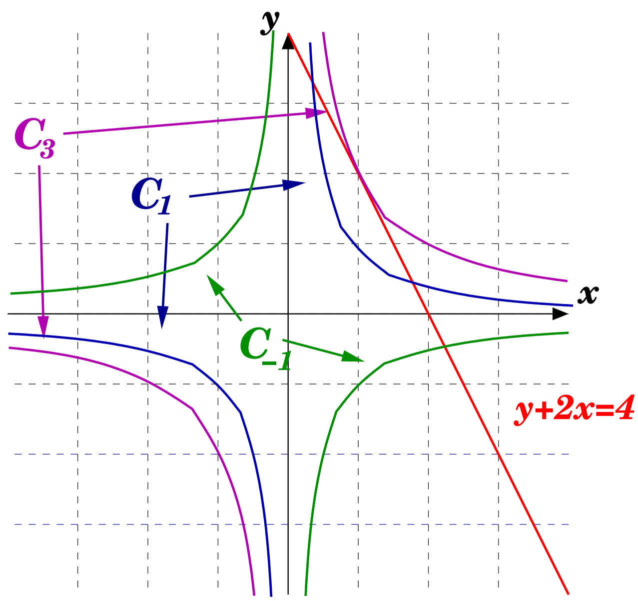
**2ème condition :** Pour chaque point $(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^2 + 4$ qui est strictement positif.

Les deux conditions du cours sont vérifiées, donc $f$ est convexe.

**[NB : Pour cette question, il n'était pas demandé de déterminer les points critiques]**

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

**question 1** On doit tracer les courbes $y = 1/x$, $y = -1/x$, $y = 2/x$, ainsi que la droite $y = 4 - 2x$. Cela donne :




**question 2** Puisque $y+2x=4$, on remplace $y$ par $4-2x$ et on introduit la fonction auxiliaire

$$g(x) = f(x, 4-2x) = x(4-2x) = 4x - 2x^2.$$

On cherche les variations de $g$, on fait par exemple le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

Le maximum de $g(x)$ est atteint pour $x=1$. Donc, sous la contrainte $y+2x=4$, le maximum de $f$ est atteint pour $x=1, y=2$.

**Exercice 4** On commence par calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y.$$

Les points critiques sont donc les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + y = 0 \\ x + 2y = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3(-2y)^2 + y = 0 \\ x = -2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y(12y+1) = 0 \\ x = -2y \end{array} \right.$$

Les deux solutions de la première équation sont donc

1. $y = 0$ et alors $x = -2 \times 0 = 0$.
2. $y = -1/12$ et alors $x = -2 \times (-1/12) = 1/6$.

Les points critiques sont donc $(0,0)$ et $(1/6, -1/12)$, ce sont les points critiques (ou stationnaires). On calcule ensuite la matrice hessienne pour tout point $(x, y)$ :

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**1er point critique** $(0,0)$**.** On a

$$\det \mathrm{Hess} f(0,0) = 6x \times 2 - 1 \times 1 = 0 - 1 = -1 < 0.$$

Ce n'est ni un minimum ni un maximum.
**2ème point critique** $(1/6,-1/12)$**.** On a

$$\det \mathrm{Hess} f(1/6,-1/12) = 6 \times (1/6) \times 2 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1 \geq 0.$$

C'est positif donc $(1/6,-1/12)$ est un extremum. Pour savoir si c'est un minimum ou un maximum on calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/6,-1/12) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1/6,-1/12) = 6 \times (1/6) + 2 = 3.$$

C'est positif donc $(1/6,-1/12)$ est un minimum local.

**Exercice 5** Cf cours.