Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits.
Barème indicatif : 4pts-5pts-4pts-5pts-2pts

Exercice 1 On pose $f(x,y) = (y+1)^4 - \log(x+1)$.

question 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

question 2 Démontrer que f n'a pas de point stationnaire.

question 3 Montrer que f est convexe.

Exercice 2 On pose

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Trouver les deux points critiques de f puis déterminer si chacun est un maximum local/minimum local/ni l'un ni l'autre.

Exercice 3 On pose $f(x,y) = y + x^2$.

question 1 Sur le même dessin, tracer les trois courbes de niveau $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$ puis l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $y + 2x = 1\}$.

question 2 Déterminer avec la méthode de substitution où est le **minimum** de la fonction f sous la contrainte $\{y + 2x = 1\}$.

Exercice 4 Une entreprise a le choix d'acheter deux produits X et Y en certaines quantités. L'utilité de x unités du produit X et y unités du produit Y est de $U(x,y) = 3x + y$. Une unité de X coûte 1 euro et occupe un volume de $2\ m^3$; une unité de Y coûte 2 euros et occupe $2\ m^3$.

L'entreprise dispose d'un budget de 2000 euros et d'un volume de stockage de $3000\ m^3$.

question 1 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions qui vérifient les contraintes (voir le repère au verso, faire les figures avec soin !).

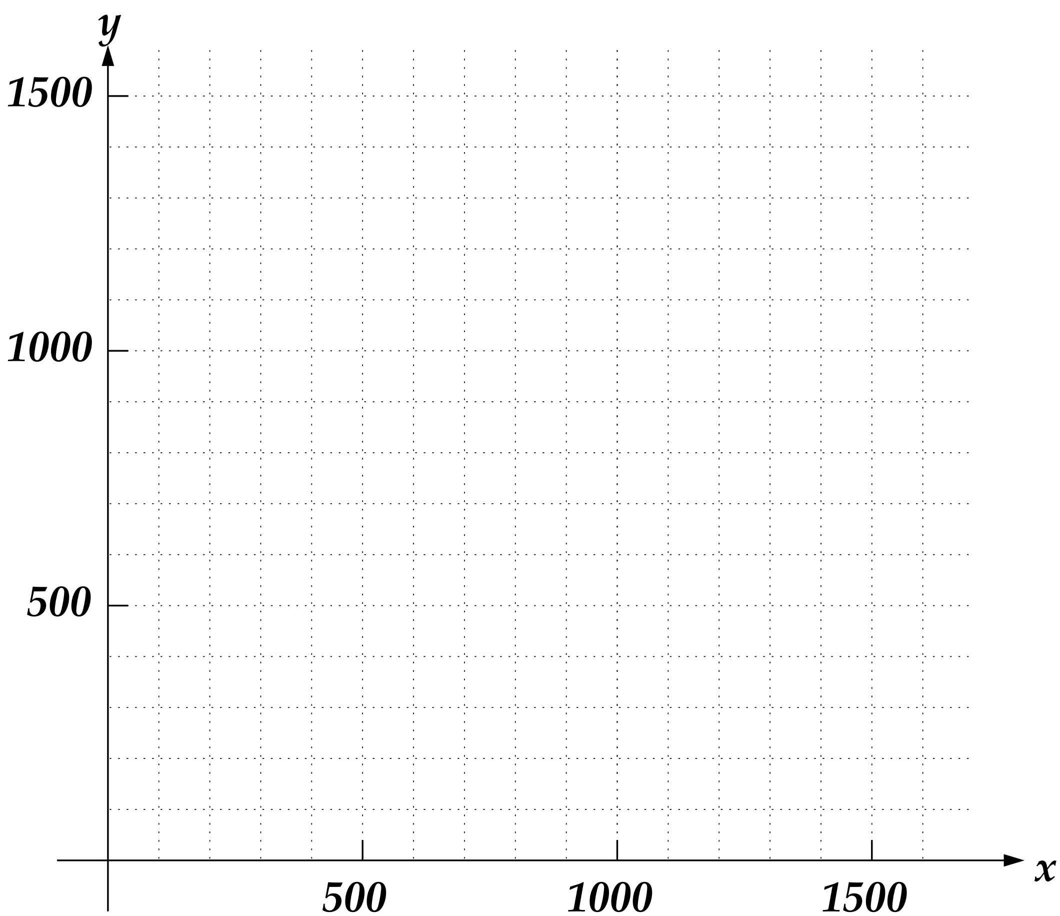
question 2 Déterminer graphiquement la solution qui optimise l'utilité (on pourra représenter l'allure des courbes de niveau de U).

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des points critiques de $f(x,y) = \exp(xy) - 2x$.
(Il n'est pas demandé de déterminer la nature des points critiques).

Antisèche :

Étudier les points critiques :
Soit (x,y) un point critique,
- Si $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0$ c'est un minimum local.
- Si $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) < 0$ c'est un maximum local.

Convexité :
Une fonction f de 2 variables est convexe si les deux conditions suivantes sont réalisées :
- $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ pour **tous** les points (x,y) de D_f.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0$ pour **tous** les points (x,y) de D_f.


y
1500
1000
500
500
1000
1500
x

Exercice 1 On pose $f(x,y) = (y+1)^4 - \log(x+1)$.

question 1 Pour que f soit définie, il faut que $x+1>0$, on a donc

$$D_f = \{(x,y) \text{ tels que } x > -1\} =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

question 2 On cherche les points stationnaires, on doit donc résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & = 0 \\ 4(y+1)^3 & = 0 \end{cases}$$

mais la première équation n'a pas de solution. Il n'y a donc pas de point stationnaire.

question 3 On détermine la matrice hessienne de f :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+1)^2} & 0 \\ 0 & 12(y+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\dfrac{1}{(x+1)^2} \times 12(y+1)^2$ et est donc toujours positif. De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + 12(y+1)^2,$$

qui est également toujours positif. Donc f est convexe sur son ensemble de définition D_f.

Exercice 2 On pose

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

On détermine les points critiques de f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y & = 0 \\ 3y^2 - 3x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = y^2 \\ y & = x^2 \end{cases}.$$

On remplace x par y^2 dans la seconde équation, cela donne $y = y^4$, c'est-à-dire $y(1-y^3) = 0$. Cette équation a deux solutions :

$$y = 0 \text{ et alors } x = 0,$$
$$y = 1 \text{ et alors } y = 1.$$

Il y a ainsi deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

On calcule ensuite la matrice hessienne pour tout point (x,y) :

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

1er point critique $(0,0)$. On a

$$\det \mathrm{Hess} f(0,0) = 36xy - 9 = 36 \times 0 - 9 = -9 < 0.$$

Ce n'est ni un minimum ni un maximum.

2ème point critique $(1,1)$. On a

$$\det \mathrm{Hess} f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

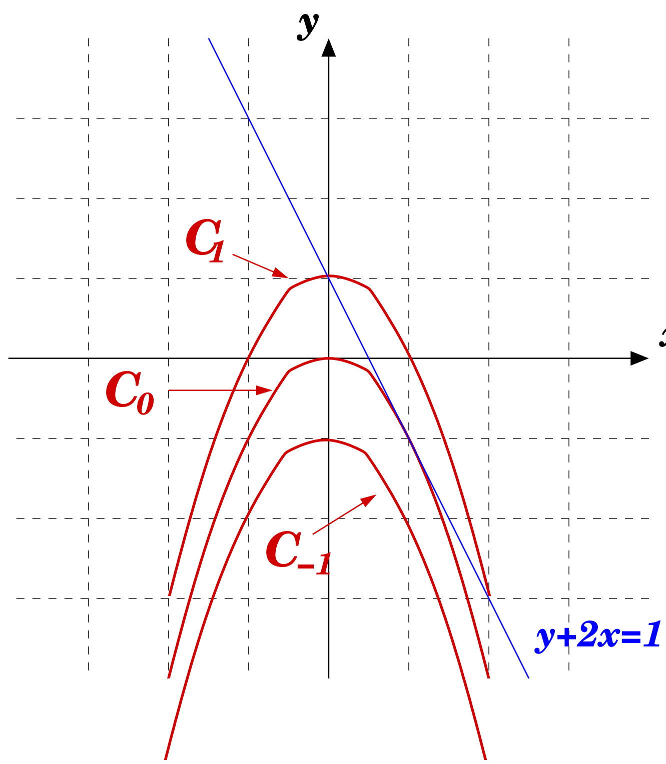
C'est positif donc $(1,1)$ est un extremum. Pour savoir si c'est un minimum ou un maximum on calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6 + 6 = 12 > 0.$$

C'est positif donc $(1,1)$ est un minimum local.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ On pose $f(x,y) = y + x^2$.

question 1 Sur le même dessin, tracer les trois courbes de niveau $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$ puis l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $y + 2x = 1\}$.



question 2 Puisque $y + 2x = 1$, on remplace y par $1 - 2x$ et on introduit la fonction auxiliaire

$$g(x) = f(x, 1-2x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2.$$

On en déduit les variations de g :

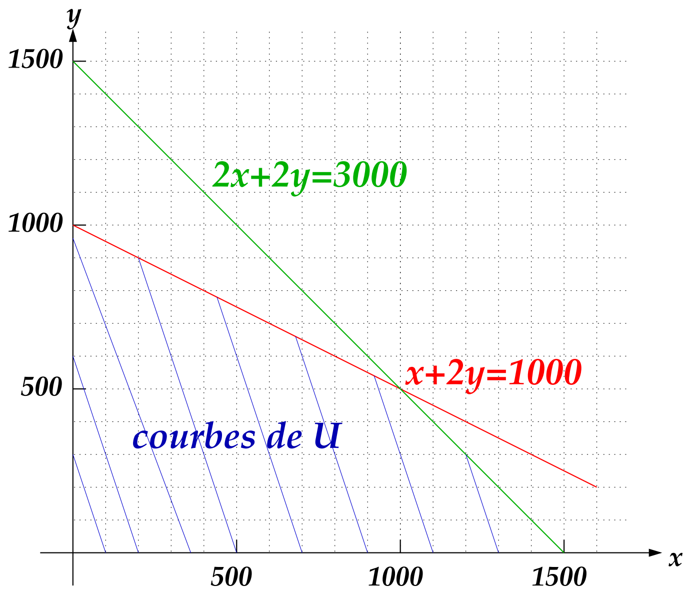
x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de $g(x)$ est donc atteint pour $x = 1$. Donc, sous la contrainte $y + 2x = 1$, le minimum de f est atteint pour $x = 1, y = -1$.

On remarque que c'est cohérent avec le dessin, puisque la droite $\{y + 2x = 1\}$ ne recontre que des courbes de niveaux positifs, sauf au point $(1,-1)$ où elle croise la courbe de niveau $\alpha = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On a représenté ci-dessous :

- La droite $x + 2y = 2000$ qui représente la contrainte de budget.
- La droite $2x + 2y = 3000$ qui représente la contrainte de stockage.
- Plusieurs courbes de niveau de U à l'intérieur du domaine délimité par les contraintes (ce sont les droites de pente -3).



question 1 L'allure des courbes de niveau montre que le maximum est atteint dans le coin en bas à droite du domaine : pour $x = 1500$ et $y = 0$. On peut d'ailleurs vérifier que

$$U(1500, 0) = 4500,$$
$$U(1000, 500) = 3500.$$

Ainsi l'utilité maximum est atteinte lorsque l'on achète que du produit X.
On voit que la contrainte de stockage est saturée, mais il reste de l'argent.

Exercice 5 On détermine les points critiques de $f(x, y) = \exp(xy) - 2x$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\exp(xy) - 2 &= 0 \\ x\exp(xy) &= 0 \end{cases}$$

Puisque $\exp(xy)$ est toujours > 0, la seconde équation dit que l'on doit avoir $x = 0$. La première équation devient alors $y\exp(0) = 2$, soit $y \times 1 = 2$.

Il y a donc un unique point stationnaire : $(0, 2)$.