Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits.
Barème indicatif : 5pts-5pts-4pts-4pts-2pts

Exercice 1 On pose
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

question 1 Trouver les deux points critiques de f puis déterminer si chacun est un maximum local/minimum local/ni l'un ni l'autre.

question 2 Est-ce que f admet un maximum global ? (Justifier).

Exercice 2 On pose $f(x,y) = (x+1)y$.

question 1 Sur le même dessin, tracer les trois courbes de niveau $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ puis l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $y + 2x = 2\}$.

question 2 Déterminer avec la méthode de substitution où est le **maximum** de la fonction f sous la contrainte $\{y + 2x = 2\}$.

Exercice 3 Une entreprise a le choix d'acheter deux produits X et Y en certaines quantités. L'utilité de x unités du produit X et y unités du produit Y est de $U(x,y) = x + 4y$. Une unité de X coûte 2 euros et occupe un volume de $1\ m^3$; une unité de Y coûte 1 euro et occupe $2\ m^3$.

L'entreprise dispose d'un budget de 1600 euros et d'un volume de stockage de $2000\ m^3$.

question 1 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions qui vérifient les contraintes (voir le repère au verso, faire les figures avec soin !).

question 2 Déterminer la solution qui optimise l'utilité (on pourra par exemple représenter certaines courbes de niveau de U).

Exercice 4 On pose $f(x,y) = (x-3)^4 - \sqrt{y+1}$.

question 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

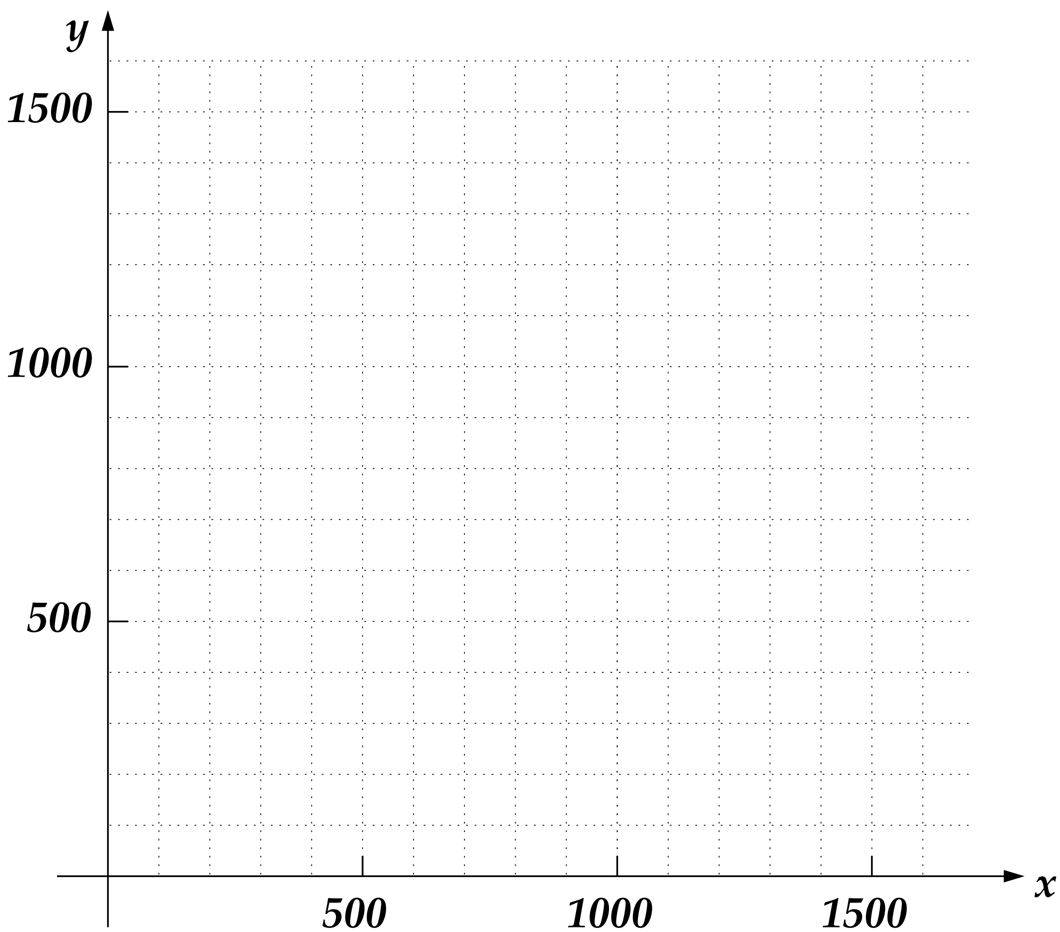
question 2 Montrer que f est convexe sur D_f.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des points critiques de $f(x,y) = (3x+y)^4$.
(Il n'est pas demandé de déterminer la nature des points critiques).

Antisèche :

Étudier les points critiques :
Soit (x,y) un point critique,
- Si $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0$ c'est un minimum local.
- Si $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) < 0$ c'est un maximum local.

Convexité :
Une fonction f de 2 variables est convexe si les deux conditions suivantes sont réalisées :
- $\det \mathrm{Hess}_f(x,y) \geq 0$ pour **tous** les points (x,y) de D_f.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0$ pour **tous** les points (x,y) de D_f.



y
1500
1000
500
500
1000
1500
x

Exercice 1 On pose
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

question 1 On commence par chercher les points critiques, on doit donc résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y &= 0 \\ 3y^2 + 3x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -x^2 \\ x &= -y^2 = -(-x^2)^2 = -x^4 \end{cases}$$

Résolvons $x = -x^4$. On a déjà $x = 0$ qui est solution. Si x est différent de zéro alors on peut diviser par x, cela donne $1 = -x^3$, soit $x^3 = -1$, c'est-à-dire $x = -1$.

Si $x = 0$, alors $y = -x^2 = -0^2 = 0$. Si $x = -1$, alors $y = -x^2 = -(-1)^2 = -1$. Il y a donc deux points stationnaires : $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

On détermine maintenant la matrice hessienne de f :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $36xy - 9$.

1er point critique $(0,0)$**.** On a

$$\det \mathrm{Hess} f(0,0) = 36xy - 9 = 36 \times 0 - 9 = -9 < 0.$$

Ce n'est ni un minimum ni un maximum.

2ème point critique $(-1,-1)$**.** On a

$$\det \mathrm{Hess} f(-1,-1) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

C'est positif donc $(-1,-1)$ est un extremum. Pour savoir si c'est un minimum ou un maximum on calcule

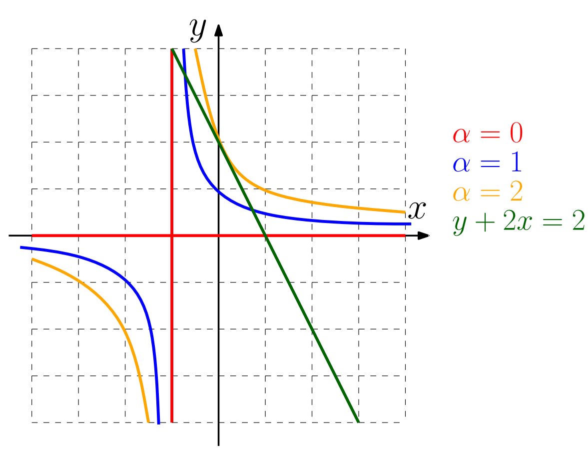
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -6 + (-6) = -12 < 0.$$

C'est négatif donc $(-1,-1)$ est un maximum local.

question 2 f n'admet pas de maximum global, car si l'on prend $y = 0$, alors $f(x,0) = x^3$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Par exemple $f(100,0) = 100^3$.

Exercice 2

question 1



question 2 On cherche à maximiser $f(x,y) = (x+1)y$ sur la droite $\{y + 2x = 2\}$. On remplace donc y par $2 - 2x$ et on introduit donc la fonction auxiliaire

$$g(x) = f(x, 2-2x) = (x+1)(2-2x) = -2x^2 + 2.$$

On a ainsi $g'(x) = -4x$ et les variations de g sont données par

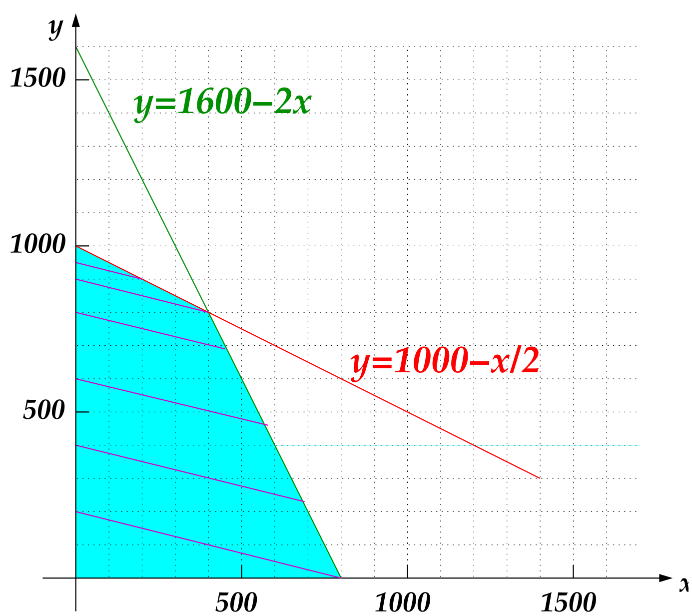
x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	2	$\searrow$

Le maximum de $g(x)$ est donc atteint pour $x = 0$. Donc, sous la contrainte $y + 2x = 2$, le maximum de f est atteint pour $x = 0, y = 2$. Il faut $f(0,2) = 2$.
C'est cohérent avec le dessin, puisque la droite $\{y + 2x = 2\}$ ne croise que des courbes de niveaux plus petits que $\alpha = 2$, sauf au point $(0,2)$ où elle croise la courbe de niveau $\alpha = 2$.

Exercice 3 On a représenté ci-dessous :

- La droite $2x + y = 1600$ qui représente la contrainte de budget.
- La droite $x + 2y = 2000$ qui représente la contrainte de stockage.

L'ensemble Ω des points (x,y) qui vérifient les contraintes est donc dessiné en bleu ciel sur le graphique :



question 1 Les courbes de niveaux de U sont les droites de la forme $\{x + 4y = \alpha\}$, c'est-à-dire $\{y = \alpha/4 - x/4\}$, donc les droites de pente $-1/4$. On en a représenté plusieurs sur le graphique. On voit que le maximum est atteint dans le coin en haut à gauche de Ω : pour $x = 0$ et $y = 1000$. On peut d'ailleurs vérifier que U est convexe [1] et que sur les autres sommets

$$U(0, 1000) = 4000,$$
$$U(400, 800) = 3600,$$
$$U(800, 0) = 800.$$

Ainsi l'utilité maximum est atteinte lorsque l'on achète 1000 unités de Y, et aucune de X.
On voit que la contrainte de stockage est saturée, mais il reste de l'argent.

1. et donc le maximum de U dans Ω est atteint sur un sommet de Ω

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On pose $f(x,y) = (x-3)^4 - \sqrt{y+1}$.

question 1 f est définie lorsque $y+1 \geq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \times [-1, +\infty[$.

question 2 Calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-3)^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{y+1}}.$$

La matrice hessienne est donc

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12(x-3)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4(y+1)\sqrt{y+1}} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\dfrac{12(x-3)^2}{4(y+1)\sqrt{y+1}}$.

Pour n'importe quel (x,y) dans D_f, $(x-3)^2$ est positif ou nul, ainsi que $(y+1)$ et $\sqrt{y+1}$. Le déterminant est donc positif.

Par ailleurs,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(x-3)^2 + \frac{1}{4(y+1)\sqrt{y+1}} \geq 0,$$

donc la fonction est bien convexe.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ On détermine les points critiques de $f(x,y) = (3x+y)^4$. On résout donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(3x+y)^3 & = 0 \\ 4(3x+y)^3 & = 0 \end{cases}$$

Les deux équations reviennent toutes deux à $3x + y = 0$. Donc l'ensemble des points stationnaires est l'ensemble

$$\left\{(x,y) \text{ tels que } 3x+y=0\right\}.$$

Il y a donc une infinité de points stationnaires, tous les points de la droite d'équation $y = -3x$.