N° d'étudiant : EXAMEN FINAL (2h) Mathématiques 1 (L1 Eco)

Exercice 1 Écrire la formule de Taylor à l'ordre deux en zéro.

Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$\cos(3x) =$ $\log(1-2x) =$

$\cos(3x)\log(1-2x) =$

Exercice 2 Montrer que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\sin(x) \leq x$.

Exercice 3 Calculer $\lim_{x \to +\infty} x \log(1 + \frac{1}{x})$.

Exercice 4 Soit $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1$. Déterminer pour chaque point stationnaire de f s'il s'agit d'un maximum local ou d'un minimum local.

Exercice 5 Donner sans justification les sommes $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 78 + 80$ et $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{11} + 3^{12}$.

$S =$ $T =$

Exercice 6 Calculer (en justifiant brièvement) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)}{x^2}$.

Exercice 7 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = (\log x)^2$.

question 1 Donner sans justification les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$f'(x) =$ $f''(x) =$

question 2 Donner l'équation de la tangente en $x = 1$ et la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

question 3 La fonction f est-elle convexe sur $]0,1[$? concave sur $]0,1[$?

Exercice 8 Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2x)-2x}{x^2}$.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n}{n^2+2}$ pour $n \geq 0$.

question 1 Justifier que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \leq 0$.

question 2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge (on ne précisera pas la limite).

Exercice 1 Écrire la formule de Taylor à l'ordre deux en zéro.

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \log(1-2x) = -2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\cos(3x)\log(1-2x) = -2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Exercice 2 Montrer que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\sin(x) \leq x$.

On étudie la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle f est dérivable et $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$.

Puisque f' est négative sur $[0, +\infty[$, elle est décroissante et $f(x) \leq f(0)$. Donc $\sin(x) - x \leq \sin(0) - 0 = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log(1 + \dfrac{1}{x})$.

On fait le changement de variable $X = 1/x$, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1 + 1/x) = \lim_{X\to 0} \frac{1}{X}\log(1 + X),$$

qui est une limite du cours, elle vaut 1.

Exercice 4 Soit $f(x) = 4x^5 + 5x^4 + 1$. Déterminer pour chaque point stationnaire de f s'il s'agit d'un maximum local ou d'un minimum local.

On calcule $f'(x) = 20x^4 + 20x^3 = 20x^3(x + 1)$. Donc f' admet deux racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 0$; ce sont les points stationnaires de f.
On fait ensuite un tableau de signe :

		-1		0	
$20x^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Donc -1 est un **maximum local** et 0 un **minimum local**.

Exercice 5 Donner sans justification les sommes $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 78 + 80$ et $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{11} + 3^{12}$.

$S = 40 \times 41 = 1640$ $\qquad$ $T = \frac{1-3^{13}}{1-3} = \frac{3^{13}-1}{2}$

Exercice 6 Calculer (en justifiant brièvement) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x)}{x^2}$.

Le numérateur tend vers $1+\sin(0)=1$. Le dénominateur tend vers $0+$. Donc le quotient tend vers $+\infty$.

Exercice 7 Pour $x>0$, on pose $f(x)=(\log x)^2$.

question 1 Donner sans justification les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$f'(x) = \quad \frac{2}{x}\log(x) \qquad f''(x) = \quad \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\log(x)$

question 2 Donner l'équation de la tangente en $x=1$ et la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

$f'(1)=0$, donc la tangente a pour équation $y=f(1)+f'(1)(x-1)=0+0(x-1)=0$, il s'agit de l'axe des abscisses.

Puisque $f''(1)=2$ est positif, la courbe est au-dessus de sa tangente.

question 3 La fonction f est-elle convexe sur $]0,1[$? concave sur $]0,1[$?

On a calculé $f''(x)=\frac{2}{x^2}(1-\log(x))$. Lorsque $x<1$, $\log(x)$ est négatif et donc le facteur $(1-\log(x))$ est positif. Donc $f''(x)$ est positif si x appartient à $]0,1[$.

Ceci montre que f est convexe sur $]0,1[$.

Exercice 8 Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)-2x}{x^2}$.

On fait le développement limité de $\log(1+2x)$ en zéro, à l'ordre deux : $\log(1+2x)=2x-2x^2+x^2\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro. On a donc

$$\frac{\log(1+2x)-2x}{x^2} = \frac{2x-2x^2+x^2\varepsilon(x)-2x}{x^2} = \frac{-2x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2} = -2+\varepsilon(x),$$

qui tend donc vers -2.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0=-2$ et $u_{n+1}=u_n-\frac{u_n}{n^2+2}$ pour $n\geq 0$.

question 1 Justifier que pour tout $n\geq 0$ on a $u_n\leq 0$.

On le montre par récurrence. Pour $n=0$, c'est vrai puisque $u_0=-2$. Supposons que c'est vrai au rang n : on a $u_n\leq 0$. Alors

$$u_{n+1}=u_n\left(1-\frac{1}{n^2+2}\right),$$

mais $n^2+2\geq 2$, donc $\frac{1}{n^2+2}\leq 1/2$, et $1-\frac{1}{n^2+2}\geq 1/2$, et donc c'est un nombre positif.

Donc u_{n+1} est le produit de u_n, qui est négatif, et d'un nombre positif. Donc $u_{n+1}\leq 0$; la propriété est vraie au rang $n+1$.

question 2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge (on ne précisera pas la limite).

Montrons que (u_n) est croissante :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n}{n^2+1},$$

cette fraction est positive (car $u_n\leq 0$), donc la suite est croissante.

La suite est croissante et majorée par zéro, donc elle converge

Pour les curieux, sachez qu'elle converge vers un nombre qui vaut à peu près $-0.54458\ldots$