Exercice 1 Montrer à l'aide d'une étude de fonction que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $(1+x)^9 \geq 1+9x$.

Exercice 2

question 1 Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$\exp(2x) =$

$\dfrac{1}{1+x} =$

$\exp(2x)\dfrac{1}{1+x} =$

question 2 Soit $f(x) = \exp(2x)\dfrac{1}{1+x}$. Combien vaut $f''(0)$? (justifier).

Exercice 3 Soit $f(x) = \sqrt{x}\sin(x)$, définie sur $[0,+\infty[$. Démontrer (en revenant à la définition) que f est dérivable en zéro.

Exercice 4 Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h^2)-1}{h^3}$.

Exercice 5 Soit $u_n = \dfrac{-n^3 + 15n^2}{n^3 + 1}$. Trouver un réel A tel que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par A.

Exercice 6 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = (\log x)^2$.

question 1 Donner sans justification les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$f'(x) =$ $f''(x) =$

question 2 Donner l'équation de la tangente au point $(1, 0)$ et la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

question 3 La fonction f est-elle convexe sur $]0, 1[$? concave sur $]0, 1[$?

Exercice 7 Calculer $\lim_{n \to +\infty} n \sin(2/n)$.

Exercice 8

question 1 Soit $f(x) = \sin(x) + 5x^4 - 1$. Démontrer que f s'annule au moins une fois dans $[0, 2]$.

question 2 En déduire que $g : x \mapsto \exp(-\cos(x) + x^5 - x)$ admet au moins un point stationnaire dans $[0, 2]$.

Exercice 1 Montrer à l'aide d'une étude de fonction que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $(1+x)^9 \geq 1 + 9x$.

On pose $f(x) = (1+x)^9 - 1 - 9x$, on a alors $f'(x) = 9(1+x)^8 - 9$. Lorsque $x \geq 0$, $1 + x \geq 1$ et donc $f' \geq 0$.
Ceci démontre que f est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $f(x) \geq f(0)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2

question 1 Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$$\exp(2x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\exp(2x)\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

question 2 Soit $f(x) = \exp(2x)\dfrac{1}{1+x}$. Combien vaut $f''(0)$? (justifier).

D'après la formule de Taylor, le coefficient devant x^2 dans le DL de f vaut $f''(0)/2$. Donc d'après le calcul précédent, $f''(0) = 2$.

Exercice 3 Soit $f(x) = \sqrt{x}\sin(x)$, définie sur $[0, +\infty[$. Démontrer (en revenant à la définition) que f est dérivable en zéro.

Il faut montrer que $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ admet une limite finie quand $h \to 0$. On considère donc

$$\frac{\sqrt{h}\sin(h)}{h} = \sqrt{h} \times \frac{\sin(h)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, $\sqrt{h} \to 0$ et $\sin(h)/h \to 1$ (c'est une limite du cours). Donc le produit tend vers zéro, et f est bien dérivable en zéro.

Exercice 4 Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h^2) - 1}{h^3}$.

On utilise le développement limité $\cos(u) = 1 - u^2/2 + u^2\varepsilon(u)$, avec $u = h^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h^2) - 1}{h^3} &= \frac{1 - (h^2)^2/2 + (h^2)^2\varepsilon(h^2) - 1}{h^3} \\ &= \frac{h^4/2 + h^4\varepsilon(h^2)}{h^3} = \frac{h}{2} + h\varepsilon(h^2).\end{aligned}$$

Quand h tend vers zéro, cette expression tend vers zéro.

Exercice 5 Soit $u_n = \dfrac{-n^3+15n^2}{n^3+1}$. Trouver un réel A tel que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par A.

On a $u_0 = 0$. Si $n \geq 1$, puisque $n^3 > 0$,

$$\frac{-n^3+15n^2}{n^3+1} \leq \frac{15n^2}{n^3+1} \leq \frac{15n^2}{n^3} = 15/n \leq 15.$$

Donc la suite est majorée (par exemple) par 15.

Il ne fallait pas calculer la limite de (u_n). Comme la suite n'est ni croissante ni décroissante, le calcul de la limite ne donne pas du tout un majorant.

Exercice 6 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = (\log x)^2$.

question 1 Donner sans justification les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$f'(x) = \frac{2}{x}\log(x)$ $\qquad$ $f''(x) = \frac{2}{x^2}(1-\log(x))$

question 2 Donner l'équation de la tangente au point $(1,0)$ et la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

C'est la droite d'équation $y = (x-1)f'(1) + f(1)$, c'est-à-dire $y = 0$. Puisque $f''(0) > 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente
On peut aussi dire plus simplement que $(\log(x))^2$ étant positif, $f(x)$ est toujours au-dessus de zéro.

question 3 La fonction f est-elle convexe sur $]0,1[$? concave sur $]0,1[$?

Pour tout $x \in]0,1[$, la quantité $1-\log(x)$ est positive, donc $f''(x)$ est toujours positif. Ceci montre que f est convexe.

Exercice 7 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(2/n)$.

Comme $2/n$ tend vers zéro, on utilise le DL de $\sin$ en zéro, l'ordre un suffit :

$$n\sin(2/n) = n(2/n + 2/n\varepsilon(2/n)) = 2 + 2\varepsilon(2/n),$$

qui tend vers 2.

Exercice 8

question 1 Soit $f(x) = \sin(x) + 5x^4 - 1$. Démontrer que f s'annule au moins une fois dans $[0,2]$.

f est **continue** car c'est une somme de fonctions "usuelles" ; $f(0) = -1$ et $f(2) = \sin(2) + 5\times 2^4 - 1 = \sin(2) + 79 \geq 78$.
Puisque $-1 \leq 0 \leq 78$, le **Théorème des Valeurs Intermédiaires** assure que f s'annule au moins une fois entre 0 et 2.

Avec une calculatrice on peut constater que f s'annule une seule fois, pour $x \approx 0.5547$.

question 2 En déduire que $g : x \mapsto \exp(-\cos(x) + x^5 - x)$ admet au moins un point stationnaire dans $[0,2]$.

D'après la question précédente, f s'annule en un point $\alpha \in [0,2]$. Le calcul suivant :

$$g'(x) = (\sin(x) + 5x^4 - 1)\exp(-\cos(x) + x^5 - x) = f(x)\exp(-\cos(x) + x^5 - x)$$

montre que $g'(\alpha) = 0$, et donc g admet un point stationnaire.