N° d'étudiant : EXAMEN FINAL (2h) Mathématiques 1 (L1 Eco)

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de $f : x \mapsto \log(1-7x)$. Montrer ensuite que pour tout x dans D_f on a l'inégalité $\log(1-7x) \leq -7x$.

Exercice 2 **question 1** Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$$\exp(x) = \qquad \frac{1}{1+2x} =$$

$$\exp(x)\frac{1}{1+2x} =$$

question 2 Soit $f(x) = \exp(x)\dfrac{1}{1+2x}$. Combien vaut $f''(0)$? (justifier).

Exercice 3 Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(3/n) + e^{-n}$.

Exercice 4 On pose $u_n = \sqrt{n} + n^2$. Trouver un rang N tel que, si $n \geq N$ alors $u_n \geq 10^{40}$.

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{2+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$. **question 1** Calculer la dérivée de f.

question 2 Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 1$.

Exercice 6 Si une entreprise achète x unités de A et y unités de B, cela lui apporte une utilité de $U(x, y) = x^2 y$. Chaque unité de A coûte 1 euro, chaque unité de B coûte également 1 euro. Si l'entreprise a un budget de 6000 euros, comment doit-elle répartir ses achats entre A et B pour maximiser son utilité ?

Exercice 7 Démontrer que l'équation $2^x = 5 - x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 2]$.

Exercice 8 Soient f et g des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$; on suppose que f est convexe et que g est concave. La fonction $(2f - g)$ est-elle convexe/concave/ni l'un ni l'autre ? (justifier)

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de $f : x \mapsto \log(1-7x)$. Montrer ensuite que pour tout x dans D_f on a l'inégalité $\log(1-7x) \leq -7x$.

Pour que f soit définie, il faut avoir $1-7x > 0$, on trouve donc $D_f =]-\infty, 1/7[$.

Pour montrer l'inégalité voulue, on fait une étude de fonction avec $g(x) = \log(1-7x) + 7x$.
On calcule $g' = \frac{-7}{1-7x} + 7 = \frac{-7+7-49x}{1-7x}$.

x	$-\infty$		0		$1/7$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Le tableau de signe assure donc que g est toujours inférieure à $g(0) = \log(1+0)+0 = 0$ sur D_f, ce qui signifie que $\log(1-7x) \leq -7x$.

Exercice 2 **question 1** Donner, sans justification, les D.L. en zéro à l'ordre deux des fonctions suivantes :

$$\exp(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\exp(x)\frac{1}{1+2x} = 1 - x + \tfrac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

question 2 Soit $f(x) = \exp(x)\dfrac{1}{1+2x}$. Combien vaut $f''(0)$? (justifier).

D'après la formule de Taylor, le coefficient devant x^2 dans le DL de f est $f''(0)/2$. D'après la question précédente, on a donc $f''(0)/2 = 5/2$, donc $f''(0) = 5$.

Exercice 3 Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(3/n) + e^{-n}$.

On commence par faire le DL de sin en zéro, à l'ordre un : $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$. En posant $1/n = x$, qui tend bien vers zéro quand n tend vers l'infini, on trouve

$$n^2\sin(3/n) + e^{-n} = n^2\left(3/n + 3/n\varepsilon(3/n)\right) + e^{-n} = \underbrace{n}_{\to+\infty}\underbrace{(3 + 3\varepsilon(3/n))}_{\to 3} + \underbrace{e^{-n}}_{\to 0}.$$

La limite recherchée est donc $+\infty$.

Exercice 4 On pose $u_n = \sqrt{n} + n^2$. Trouver un rang N tel que, si $n \geq N$ alors $u_n \geq 10^{40}$.

Pour simplifier on commence par remarquer que $u_n \geq n^2$.

Ensuite, si $n \geq 10^{20}$ alors

$$u_n \geq n^2 \geq \left(10^{20}\right)^2 = 10^{40}.$$

Donc l'entier $N = 10^{20}$ convient.

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{2+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$. **question 1** Calculer la dérivée de f.

$$f'(x) = \left(2+x^2\right)' \frac{1}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.$$

question 2 Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 1$.

D'après le cours l'équation de la tangente est $y = f(1) + (x-1)f'(1) = \sqrt{3} + (x-1)\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 6 Si une entreprise achète x unités de A et y unités de B, cela lui apporte une utilité de $U(x,y) = x^2y$. Chaque unité de A coûte 1 euro, chaque unité de B coûte également 1 euro. Si l'entreprise a un budget de 6000 euros, comment doit-elle répartir ses achats entre A et B pour maximiser son utilité ?

L'entreprise dépense $x+y$ euros, ceci nous donne l'équation $x+y = 6000$, soit $y = 6000-x$.

On remplace y par $6000-x$, l'entreprise obtient donc une utilité de

$$U(x, 6000-x) = x^2(6000-x) = 6000x^2 - x^3.$$

On cherche à savoir pour quel x la quantité $f(x) = 6000x^2 - x^3$ est maximale, on fait donc une étude de fonction pour x compris entre 0 et 6000. On calcule $f'(x) = 12000x - 3x^2 = 3x(4000-x)$.

x	0		4000		6000
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

La fonction f est maximale pour $x = 4000$, l'entreprise doit donc acheter 4000 unités de A et 2000 unités de B.

Exercice 7 Démontrer que l'équation $2^x = 5 - x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,2]$.

Posons $f(x) = 2^x - 5 + x^2$, f est une somme de fonctions usuelles continues, c'est donc une fonction continue. On a

$$f(0) = 2^0 - 5 = -4 < 0, \qquad f(2) = 2^2 - 5 + 2^2 = 3 > 0.$$

Donc, d'après le Théorème de Valeurs Intermédiaires (TVI), il existe au moins un x pour lequel $f(x) = 0$, c'est-à-dire $2^x = 5 - x^2$.

À l'ordinateur, on peut vérifier qu'il y a une unique solution $x \approx 1,4841...$

Exercice 8 Soient f et g des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$; on suppose que f est convexe et que g est concave. La fonction $(2f-g)$ est-elle convexe/concave/ni l'un ni l'autre ? (justifier)

D'après l'énoncé on a, pour tout réel x, $f''(x) \geq 0$ et $g''(x) \leq 0$, soit $-g''(x) \geq 0$.

Donc pour chaque x on a

$$\begin{aligned}(2f-g)''(x) &= 2f''(x) - g''(x) \\ &= 2f''(x) + (-g''(x)) \geq 0.\end{aligned}$$

La fonction $2f-g$ est donc convexe.