NOM/Prénom : **Amphi et Groupe de TD :**

L1 ÉCO-GESTION 2010-11 (N.Enriquez - L.Gerin - X.Mary) EXAMEN PARTIEL - Mathématiques 1

Durée : 1h
Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses devront être justifiées, vous ne devez rendre que cette feuille.
Barème approximatif : 2pts par question

Exercice 1 Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x) - x^3}{x-1}$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \log(x^2 - 4)$. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^6 + x - 1$. Montrer avec un théorème du cours que f s'annule au moins une fois entre 0 et 1.

Exercice 4 Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Exercice 5 Soit $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 1/x$. Déterminer, sans justification, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs ensembles de définitions $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$

$f \circ g(x) =$	$D_{f \circ g} =$
$g \circ f(x) =$	$D_{g \circ f} =$

Exercice 6 Déterminer la limite suivante $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^{10} - 2^{10}}{h}$.

Exercice 7 Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \log(x + \dfrac{1}{x})$.

question 1 Justifier **brièvement** que f est continue sur $]0, +\infty[$.

question 2 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to 0+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

question 3 Est-ce que f est prolongeable par continuité en zéro ? Justifier.

question 4 Est-ce que f admet une branche parabolique ? Justifier. (les branches paraboliques ne sont plus au programme en 2011-12)

Exercice 1 Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)-x^3}{x-1}$.

On factorise en haut en bas par le terme qui est le plus grand quand $x \to \infty$:

$$\frac{\exp(x)-x^3}{x-1} = \frac{\exp(x)(1-\frac{x^3}{\exp(x)})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{\exp(x)}{x} \times \frac{1-\frac{x^3}{\exp(x)}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Par croissance comparée on a :

$$\frac{\exp(x)}{x} \to \infty, \quad 1-\frac{x^3}{\exp(x)} \to 1, \quad 1-\frac{1}{x} \to 1.$$

On conclut que le tout tend vers $+\infty$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \log(x^2-4)$. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

On cherche quand x^2-4 est strictement positif. Or $x^2-4 = (x+2)(x-2)$, un tableau de signe montre que ce produit est positif quand $x < -2$ ou $x > 2$, soit $D_f =]-\infty, -2[\, \cup\,]2, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^6 + x - 1$. Montrer avec un théorème du cours que f s'annule au moins une fois entre 0 et 1.

On pense au théorème des valeurs intermédiaires (on pourrait également faire une étude de fonction sur l'intervalle $[0,1]$).
On a $f(0) = 0^6 + 0 - 1 = -1 < 0$ et $f(1) = 1^6 + 1 - 1 = 1 > 0$. Par ailleurs, f est continue car c'est un polynôme. D'après le TVI, il existe donc au moins un $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.

Exercice 4 Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Pour lever l'indétermination, on va multiplier et diviser $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ par sa quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}},\end{aligned}$$

et le dénominateur tend vers $+\infty$.

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1 + 0 = 1$.

Exercice 5 Soit $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 1/x$. Déterminer, sans justification, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs ensembles de définitions $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$

$f \circ g(x) = \quad (1/x)^2 - 1$ $\qquad D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g \circ f(x) = \quad \dfrac{1}{x^2 - 1}$ $\qquad D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 6 Déterminer la limite suivante $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{10} - 2^{10}}{h}$.

$$\frac{(2+h)^{10} - 2^{10}}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h},$$

où l'on a posé $f(x) = x^{10}$.
Donc, par définition de la dérivée, ça tend vers $f'(2)$. Or $f'(x) = 10x^9$, donc la limite est 10.2^9.

Exercice 7 Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \log(x + \dfrac{1}{x})$.

question 1 Justifier **brièvement** que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$, $x + 1/x$ est continue car c'est la somme d'un polynôme et du quotient d'un polynôme. On lui applique $\log$ qui est continue.

question 2 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

1) On a $\lim_{x\to 0+} x + 1/x = +\infty$ et $\lim_{u\to +\infty} \log(u) = +\infty$. Donc, par composée des limites, $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

2) On a $\lim_{x\to +\infty} x + 1/x = +\infty$ et $\lim_{u\to +\infty} \log(u) = +\infty$. Donc, par composée des limites, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

question 3 Est-ce que f est prolongeable par continuité en zéro ? Justifier.

Non : f n'admet pas de limite **finie** en zéro.

question 4 Est-ce que f admet une branche parabolique ? Justifier.

On cherche à étudier la limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. On a (quand $x > 1$)

$$0 \leq \frac{\log(x + 1/x)}{x} \leq \frac{\log(2x)}{x},$$

qui tend vers zéro par croissance comparée. Donc f n'admet pas de branche parabolique.