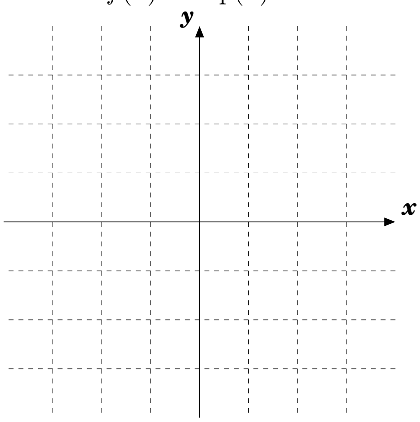
NOM/Prénom : **Amphi et Groupe de TD :**

L1 ÉCO-GESTION 2011-12 (N.Enriquez - L.Gerin - X.Mary) CONTRÔLE CONTINU - Mathématiques 1

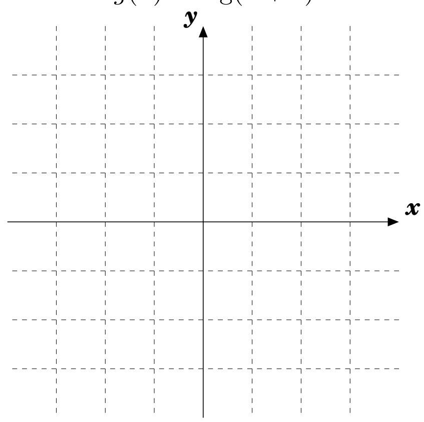
Durée : 1h
Documents et calculatrices interdits. Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 Tracer sans justification les courbes des fonctions suivantes :

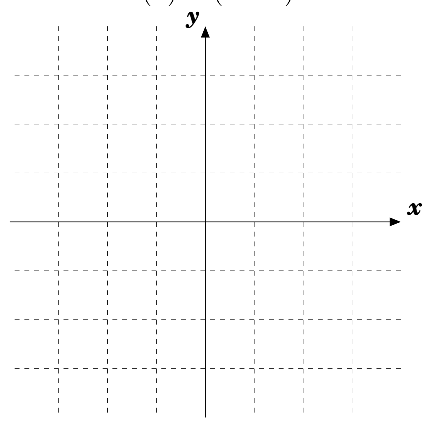
$f(x) = \exp(x) - 1$



$g(x) = \log(x + 2)$



$h(x) = (x - 1)^3$



Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{4n^2 + \sqrt{n}}{1 + 3n^2}$. Trouver un réel A tel que (u_n) est majorée par A.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \log(x)$. Déterminer, sans justification, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs ensembles de définitions $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$

$f \circ g(x) =$ $D_{f\circ g} =$

$g \circ f(x) =$ $D_{g\circ f} =$

Exercice 4 Simplifier (en justifiant) l'expression $A = \log(2) + \log(\cos(\pi/3)) + 1$.

Exercice 5 Donner sans justification les sommes $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 78 + 80$ et $T = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{12} + 5^{13}$.

$S =$ $T =$

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^3+8}{n^3}$. Trouver un rang N tel que, si $n \geq N$ alors $u_n \in [0.999; 1.001]$.

Exercice 7 Calculer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\exp(\cos(n^4))}{n}$.

Exercice 8 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_n & = x_{n-1}(1 - \frac{1}{2n^2}) \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$

question 1 Démontrer que, pour tout entier n, on a $x_n > 0$.

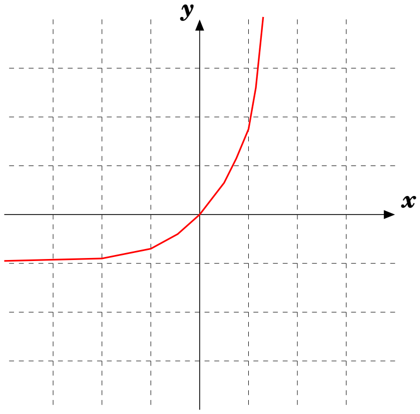
question 2 Étudier la monotonie de (x_n). En déduire que cette suite est convergente.

NOM/Prénom : **Amphi et Groupe de TD :**

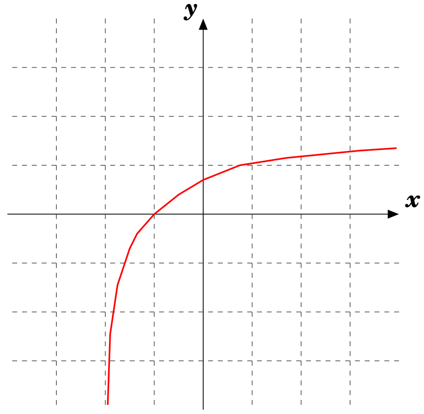
L1 ÉCO-GESTION 2011-12 (N.Enriquez - L.Gerin - X.Mary) CORRIGÉ - Mathématiques 1

Exercice 1 Tracer sans justification les courbes des fonctions suivantes :

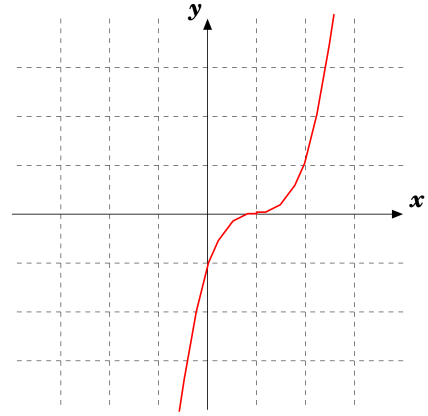
$f(x) = \exp(x) - 1$



$g(x) = \log(x + 2)$



$h(x) = (x - 1)^3$



Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{4n^2 + \sqrt{n}}{1 + 3n^2}$. Trouver un réel A tel que (u_n) est majorée par A.

Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\sqrt{n} \leq n^2$ et bien sûr $1 + 3n^2 \geq 3n^2$. Donc

$$\frac{4n^2 + \sqrt{n}}{1 + 3n^2} \leq \frac{4n^2 + \sqrt{n}}{3n^2} \leq \frac{4n^2 + n^2}{3n^2} = \frac{5}{3}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $5/3$.

Remarque : Un calcul de limite ne suffit pas, une suite n'est pas forcément majorée par sa limite !

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \log(x)$. Déterminer, sans justification, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs ensembles de définitions $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$

$f \circ g(x) = (\log(x))^2 + 1$ $\qquad D_{f\circ g} =]0, +\infty[$

$g \circ f(x) = \log(x^2 + 1)$ $\qquad D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

Exercice 4 Simplifier (en justifiant) l'expression $A = \log(2) + \log(\cos(\pi/3)) + 1$.

$$A = \log(2) + \log(\cos(\pi/3)) + 1 = \log(2) + \log(1/2) + 1 = \log(2 \times 1/2) + 1 = \log(1) + 1 = 1.$$

Exercice 5 Donner sans justification les sommes $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 78 + 80$ et $T = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{12} + 5^{13}$.

$$S = 2 \times \frac{40 \times 41}{2} = 1640 \qquad\qquad T = 5^2 \times \frac{5^{12} - 1}{4}$$

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^3 + 8}{n^3}$. Trouver un rang N tel que, si $n \geq N$ alors $u_n \in [0.999; 1.001]$.

On cherche à partir de quand $u_n \in [0.999; 1.001]$, c'est à dire à partir de quand

$$\begin{array}{lll} -0.001 & \leq u_n - 1 & \leq 0.001 \\ -0.001 & \leq \frac{8}{n^3} & \leq 0.001. \end{array}$$

La première inégalité est toujours vérifiée. Pour la seconde, $8/n^3 \leq 0.001$ est vérifiée lorsque $8 \leq n^3 \times 0.001$, c'est-à-dire lorsque

$$n \geq \sqrt[3]{\frac{8}{0.001}} = \sqrt[3]{8 \times 1000} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{1000} = 2 \times 10 = 20.$$

Exercice 7 Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\cos(n^4))}{n}$.

Puisque la fonction $\cos$ est troujours comprise entre -1 et 1, et que $\exp$ est croissante, on a

$$\begin{array}{rll} -1 & \leq \cos(n^2) & \leq 1 \\ \exp(-1) & \leq \exp(\cos(n^2)) & \leq \exp(1) \\ \frac{\exp(-1)}{n} & \leq \frac{\exp(\cos(n^2))}{n} & \leq \frac{\exp(1)}{n}. \end{array}$$

Le terme de gauche et celui de droite tendent vers 0, donc par encadrement la limite recherchée est zéro.

Exercice 8 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_n & = x_{n-1}(1 - \frac{1}{2n^2}) \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$

question 1 Démontrer que, pour tout entier n, on a $x_n > 0$.

On montre par récurrence que pour tout n, la propriété $P_n =$"$x_n > 0$" est vraie.
Puisque $x_0 = 1 > 0$, P_0 est vraie. Supposons maintenant que P_k est vraie pour un certain k. Montrons que P_{k+1} l'est également.

$$x_{k+1} = x_k(1 - \frac{1}{2(k+1)^2}) > 0.$$

En effet, on a $\frac{1}{2(k+1)^2} \leq 1/2$ ce qui assure que $1 - \frac{1}{2(k+1)^2}$ est positif. Par ailleurs nous savons supposé que x_k est positif (car P_k est supposée vraie).
Donc la propriété P_{k+1} est vraie également.
Par récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

question 2 Étudier la monotonie de (x_n). En déduire que cette suite est convergente.

On étudie le signe de $x_n - x_{n-1}$ pour n'importe quel n :

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1}(1 - \frac{1}{2n^2}) - x_n = -\frac{x_{n-1}}{2n^2},$$

qui est négatif car $x_{n-1} > 0$ (question précédente). Donc la suite (x_n) est décroissante. Comme elle est minorée (par zéro), elle converge.
Pour information, on peut déterminer à la calculatrice que cette suite converge vers environ $0.3583\ldots$