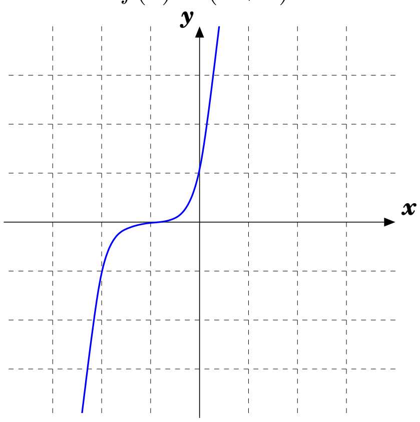
NOM/Prénom : **Amphi et Groupe de TD :**

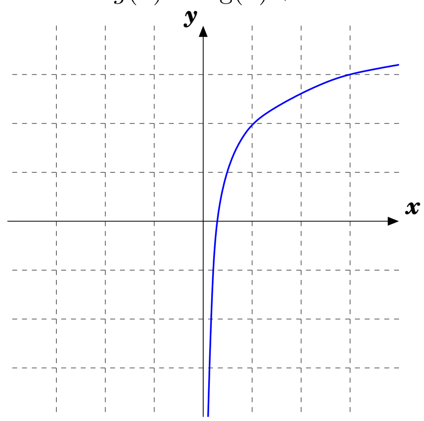
Durée : 1h. Documents et calculatrices interdits. Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 Tracer sans justification les courbes des fonctions suivantes :

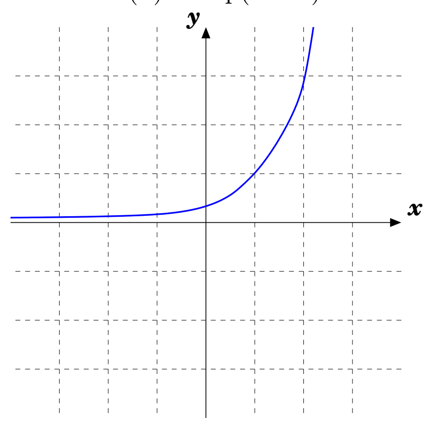
$f(x) = (x+1)^3$



$g(x) = \log(x) + 2$



$h(x) = \exp(x-1)$



Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{3n^3 + 117n\sqrt{n}}{1+3n^3}$. Trouver un réel A tel que (u_n) est majorée par A.

Pour $n \geq 1$, on a $n\sqrt{n} \leq n^3$ et $1 + 3n^3 \geq 3n^3$. Donc

$$u_n = \frac{3n^3 + 117n\sqrt{n}}{1+3n^3} \leq \frac{3n^3 + 117n^3}{3n^3} = \frac{120}{3} = 40.$$

La suite est donc majorée par 40.

(Il ne servait à rien de calculer la limite, car la suite n'est pas majorée par sa limite.)

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \log(x-1)$. Déterminer, sans justification, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, ainsi que leurs ensembles de définitions $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$.

$f \circ g(x) = (\log(x-1))^2 + 2$ $D_{f\circ g} =]1, +\infty[$

$g \circ f(x) = \log(x^2 + 1)$ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

Exercice 4 Simplifier (en justifiant) l'expression $A = \log(4) + 2\log(\cos(\pi/3)) + 1$.

$$\begin{aligned}
\log(4) + 2\log(\cos(\pi/3)) + 1 &= \log(4) + 2\log(1/2) + 1 \\
&= \log(4) + \log(1/4) + 1 \\
&= \log(4 \times 1/4) + 1 = \log(1) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Donner la définition de : "(u_n) converge vers 1".

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que,

$$\text{si } n \geq N, \text{ alors } |u_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Exercice 6 Donner sans justification les sommes $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 86 + 88$ et $T = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{14} + 5^{15}$.

$S = 44 \times \frac{2+88}{2} = 1980.$ $T = 5^2 \frac{1-5^{14}}{1-5} = \frac{25}{4}(5^{14} - 1)$

Exercice 7 Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\exp(\cos(n^4))}{n}$.

Pour tout n, $-1 \leq \cos(n^4) \leq 1$. Puisque $x \mapsto \exp(x)$ est croissante,

$$\frac{\exp(-1)}{n} \leq \frac{\exp(\cos(n^4))}{n} \leq \frac{\exp(1)}{n}.$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers zéro, donc d'après le théorème d'encadrement le terme du milieu tend également vers zéro.

Exercice 8 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique. On pose $y_n = e^{x_n},\ n \geq 0$. Montrer que (y_n) est une suite géométrique.

La suite (x_n) est arithmétique, ce qui veut dire que la quantité $x_{n+1} - x_n$ est constante, notons-là r. On a ainsi pour chaque n

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\exp(x_{n+1})}{\exp(x_n)} = \exp(x_{n+1} - x_n) = \exp(r).$$

Donc (y_n) est bien une suite géométrique de raison $\exp(r)$.

Exercice 9 Soit $u_0 = -1,\ u_{n+1} = \left(n^2 - 2n + 6\right) u_n,\ n \geq 0$. Montrer que $u_n \leq 0$ pour $n \geq 0$, puis que (u_n) est monotone.

1) Pour tout n, u_n est négatif.
On a pour chaque n

$$u_{n+1} = (n^2 - 2n + 6)u_n = \left((n-1)^2 + 5\right) u_n,$$

donc u_{n+1} est du même signe que u_n. De même, u_n est de même signe que u_{n-1}, et ainsi de suite. Dons tous les u_n sont du même signe que u_0, qui est négatif.

2) (u_n) est monotone.
Il suffit* d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n^2 - 2n + 6)u_n - u_n \\ &= (n^2 - 2n + 5)u_n \\ &= \left((n-1)^2 + 4\right) u_n, \end{aligned}$$

ainsi $u_{n+1} - u_n$ est le produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif, c'est donc un nombre négatif. La suite est décroissante.

* *Pour ceux qui avaient choisi d'étudier le rapport u_{n+1}/u_n, il fallait faire attention au fait que u_n est négatif, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ signifie donc que u_{n+1} est* **plus petit** *que u_n.*