Projet 1

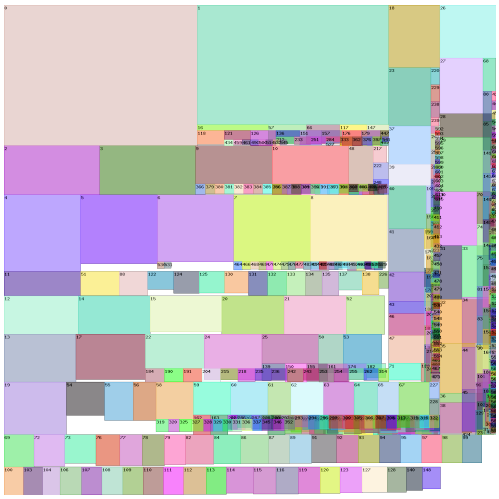
Bin packing avec paquets aléatoires

sujet proposé par Lucas Gerin

lucas.gerin@polytechnique.edu

Mots-clés : Algorithmes probabilistes, Calculs de densités, Convergence en loi, Probabilités conditionnelles.

Le problème du *Bin packing* est un problème célèbre en Algorithmique et en Optimisation combinatoire. Il s'agit de ranger des paquets en utilisant un nombre minimum de boîtes. Nous allons étudier certains aspects du *Bin packing* en dimension 1 lorsque les tailles de paquets sont aléatoires.



La solution approchée d'un problème de Bin Packing en dimension 2. Source : `https://stackoverflow.com/questions/19673588/`.

1.1 Bin packing : Définitions et notations

On considère une suite de boîtes $B_1, B_2, \dots$ de taille 1 et une suite de paquets aléatoires de tailles $X_1, X_2, \dots$ dans $[0, 1]$. Le problème du *Bin packing* (en dimension 1) consiste à affecter chaque paquet à une boîte, de la façon la plus compacte possible.

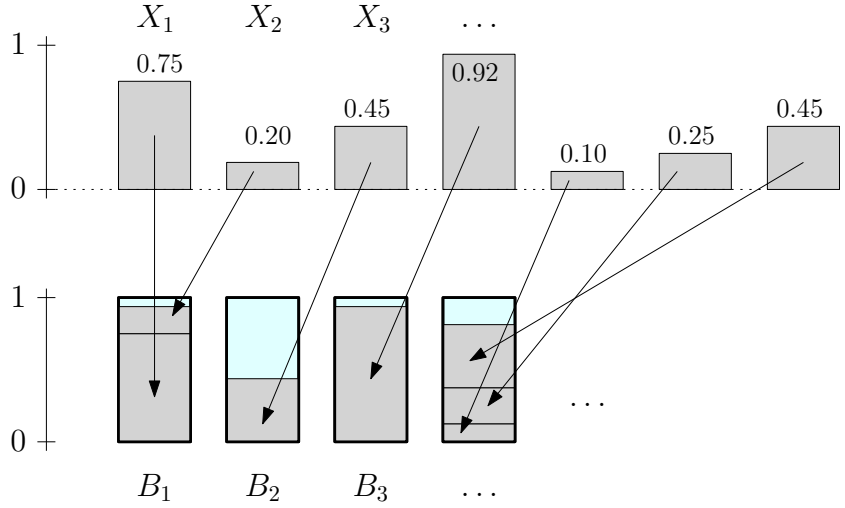


Figure 1.1 – Un exemple d'affectation selon la stratégie *Prochaine-Qui-Convient* avec $X_1 = 0.75; X_2 = 0.20; X_3 = 0.45; \ldots$. On a $\phi(1) = 1, \phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \ldots$ et $L_1 = X_1 + X_2 = 0.95$, $L_2 = X_3 = 0.45$. On voit sur cet exemple que cette stratégie n'est pas du tout optimale : on pourrait affecter $X_5 = 0.10$ à la boîte B_2 pour gagner de la place.

Formellement, on cherche une fonction $\phi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ qui vérifie, pour toute boîte B_j,

$$L_j := \sum_{i \geq 1, \phi(i) = j} X_i \leq 1.$$

Si $\phi(i) = j$ on considère que la paquet X_i est affecté à la boîte B_j. La quantité L_j représente le remplissage de la boîte B_j. Enfin, on pose $\mathcal{N}_j$ le nombre de paquets dans B_j :

$$\mathcal{N}_j = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\phi(i)=j}.$$

En général il est très difficile de trouver la meilleure fonction ϕ (celui qui permet un rangement le plus compact possible). Ici on va considérer une stratégie simple (mais pas optimale) appelée stratégie *Prochaine-Qui-Convient*. On affecte les paquets dans l'ordre où ils arrivent, et on remplit également les boîtes dans l'ordre. L'idée est de remplir chaque boîte au maximum, puis considérer la boîte suivante. Formellement :

1. On affecte X_1 à B_1 : $\phi(1) = 1$. On pose $j = 1$.
2. Pour chaque $i \geq 2$ il y a deux cas selon que l'on peut ranger X_i dans B_j ou pas :
   - Si $X_i + \sum_{i' < i; \phi(i') = j} X_{i'} \leq 1$ on affecte X_i à B_j : $\phi(i) = j$.
   - Si $X_i + \sum_{i' < i; \phi(i') = j} X_{i'} > 1$ on affecte X_i à B_{j+1} : $\phi(i) = j + 1$. On pose $j = j + 1$.

Dans tout ce projet on va considérer un modèle aléatoire dans lequel les (X_i) sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Les questions que l'on se pose sont par exemple :

- Que peut-on dire du nombre de paquets dans la boîte B_1? dans la boîte B_j?
- Que peut-on dire du taux de remplissage L_1? de L_j?
- Combien faut-il de boîtes pour ranger n paquets, pour n grand?

1.2 Paquets avec loi continue uniforme.

Solution. Remarque : Pour toute cette Section, je me suis inspiré du Chap.5 de Micha Hofri. *Probabilistic Analysis of Algorithms*, Springer (1987).

Dans cette section, les X_i sont supposées suivre la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, on ne considère pour l'instant que la stratégie *Prochaine-Qui-Convient*.

Remplissage de la boîte B_1

S1. Simuler $S = 100000$ fois la variable $\mathcal{N}_1$ et afficher la moyenne des résultats.

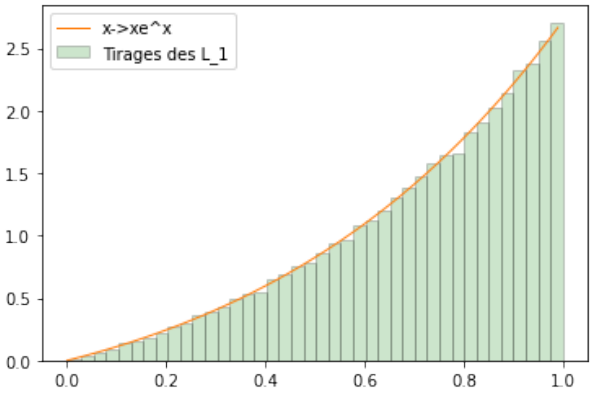
Solution. Un code simple :

```
def NbPaquetsProchaineBoite():
n=0
x=0
while x<1:
x=x+np.random.rand()
n=n+1
return n-1
```

Je trouve, pour 100000 simulations, une moyenne empirique de 1.7388.

S2. Simuler $S = 100000$ fois la variable L_1, et afficher les résultats dans un histogramme normalisé[1] avec 50 bâtons. Afficher sur le même graphique la courbe $x \mapsto xe^x$.
(*Si vos simulations sont correctes l'histogramme devrait être très proche de la courbe.*)

Solution.



On va maintenant confirmer par la théorie ces deux résultats expérimentaux. Les preuves vont reposer sur une formule assez simple à propos de la densité de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ pour tout n. Observons tout d'abord que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire S_n, qui est à valeurs dans $[0,n]$, admet une densité f_n. En effet c'est la somme de variables aléatoires indépendantes à densité.

[1] Cela signifie que l'aire totale des bâtons vaut 1. Pour afficher la liste `L` dans un histogramme normalisé avec 50 bâtons on peut utiliser la commande `plt.hist(L,bins=50, density=True)` .

T1. [Préliminaire] En utilisant la formule de convolution (voir le polycopié de MAP361), démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (\star)$$

(*Pour $x > 1$ l'expression de $f_n(x)$ est bien plus compliquée et n'est pas utile pour ce projet.*)

Solution. Pour $n = 1$ c'est clair. Pour l'hérédité,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_{u\in\mathbb{R}} f_n(u) f_1(x-u) du \\ &= \int_{u\in\mathbb{R}} f_n(u) \mathbf{1}_{x-1\leq u\leq x} du \\ &= \int_{u=x-1}^{x} f_n(u) du = \int_{u=0}^{x} f_n(u) du \qquad (\text{car } x \leq 1) \\ &= \int_{u=0}^{x} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

T2. Justifier que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_1 \geq k) = \mathbb{P}(S_k \leq 1).$$

En utilisant la formule $(\star)$, en déduire la loi de $\mathcal{N}_1$, puis son espérance. Vérifier que votre calcul est cohérent avec votre résultat expérimental obtenu en S1.

Solution. L'événement $\{\mathcal{N}_1 = k\}$ signifie exactement que l'on peut ranger les k premiers paquets, d'où la formule. Ensuite

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_1 \geq k) = \mathbb{P}(S_k \leq 1) = \frac{1}{k!}.$$

Pour l'espérance on écrit

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_1) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(\mathcal{N}_1 \geq k) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} = e - 1.$$

T3. On admet que la variable aléatoire L_1 admet une densité sur l'intervalle $[0,1]$, que l'on va noter f_L. On admet également que f_L est continue. Soit $x \in [0,1[$ et $k \geq 1$, démontrer que si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit alors

$$\mathbb{P}(S_k \in [x, x+\varepsilon], X_{k+1} > 1-x) \leq \mathbb{P}\left(L_1 \in [x, x+\varepsilon], \mathcal{N}_1 = k\right) \leq \mathbb{P}(S_k \in [x, x+\varepsilon], X_{k+1} > 1-x-\varepsilon). \qquad (\#)$$

Solution. On a

$$\mathbb{P}\left(L_1 \in [x, x+\varepsilon], \mathcal{N}_1 = k\right) = \mathbb{P}(S_k \in [x, x+\varepsilon], S_k + X_{k+1} > 1)$$

et en encadrant S_k par x et $x+\varepsilon$ on a les inégalités souhaitées.

T4. Démontrer que pour $x \in [0,1[$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$x\left(e^{x+\varepsilon} - e^x\right) \leq \int_x^{x+\varepsilon} f_L(u) du \leq (x+\varepsilon)\left(e^{x+\varepsilon} - e^x\right).$$

En déduire que $f_L(x) = xe^x$.

Solution. On calcule les 3 membres de (#) puis on somme sur $k \geq 1$:

$$\begin{array}{rcccl} \int_x^{x+\varepsilon} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} du \times x & \leq & \mathbb{P}\left(L_1 \in [x, x+\varepsilon], \mathcal{N}_1 = k\right) & \leq & \int_x^{x+\varepsilon} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} du \times (x+\varepsilon) \\ \int_x^{x+\varepsilon} e^u du \times x & \leq & \mathbb{P}(L_1 \in [x, x+\varepsilon]) & \leq & \int_x^{x+\varepsilon} e^u du \times (x+\varepsilon) \\ x\left(e^{x+\varepsilon} - e^x\right) & \leq & \int_x^{x+\varepsilon} f_L(u) du & \leq & x\left(e^{x+\varepsilon} - e^x\right) \end{array}$$

On divise tout par ε et on fait tendre ε vers 0, on obtient alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f_L(u) du = x e^x,$$

ce qui, en utilisant le Théorème de la moyenne (ici on utilise que f_L est continue), donne exactement que $f_L(x) = xe^x$.

1.2.1 Dépendance des boîtes

On cherche à illustrer le fait que le remplissage des deux premières boîtes n'est pas indépendant, d'abord théoriquement puis expérimentalement.

T5. Démontrer mathématiquement que les variables L_1 et L_2 ne sont pas indépendantes.

Solution. Soit $x \in (0,1)$ (plutôt petit, disons $x = 0.1$). On a que $\mathbb{P}(L_1 < x)$ et $\mathbb{P}(L_2 < x)$ sont > 0 (peu importe la valeur). Par contre il est impossible d'avoir $\{L_1 < x\} \cap \{L_2 < x\}$ car sinon on aurait pu ranger les objets de B_2 dans B_1. Donc

$$0 < \mathbb{P}(L_1 < x) \times \mathbb{P}(L_2 < x) \neq \mathbb{P}(L_1 < x, L_2 < x) = 0.$$

On peut aussi écrire que forcément $L_2 \geq 1 - L_1$, mais est-ce que c'est un argument suffisant pour un élève de MAP361?

S3. Pour chercher à quantifier cette dépendance, simuler $S = 100000$ couples de variables aléatoires $(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}), \ldots (L_1^{(S)}, L_2^{(S)})$, où chaque couple est indépendant et a même loi que (L_1, L_2). Afficher la quantité

$$C_S = \overline{L_1 L_2} - \overline{L_1} \times \overline{L_2} := \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} L_1^{(s)} L_2^{(s)} - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} L_1^{(s)} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} L_2^{(s)}.$$

(Cette quantité est appelée covariance empirique.) Comment peut-on interpréter le signe de C_S?

Solution. Je trouve $C_N = -0.0106... < 0$. Le fait que la covariance empirique est négative traduit le fait que plus L_1 est grand plus L_2 est petit (et réciproquement). C'est même évident ici car on a forcément $L_2 \geq 1 - L_1$.

1.2.2 Remplissage de la boîte B_j, pour j grand.

Les boîtes ne sont pas remplies de façon homogène : on peut se convaincre que $L_1, L_2, \ldots$ n'ont pas la même loi. Il est difficile d'étudier théoriquement la variable aléatoire L_j pour j quelconque mais il a toutefois été démontré[2] que lorsque $j \to +\infty$,

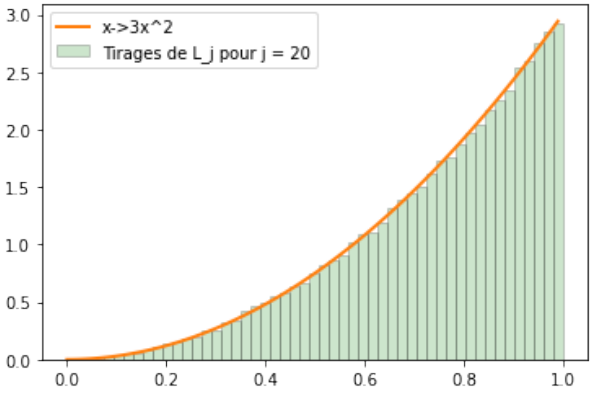
$$L_j \overset{\text{(loi)}}{\to} \mathcal{L}, \qquad (\$)$$

où $\mathcal{L}$ est une variable aléatoire sur $[0,1]$, de densité $x \mapsto 3x^2 \mathbf{1}_{0<x<1}$. Nous allons chercher à illustrer expérimentalement ce résultat. (Il se trouve que la convergence dans ($) est très rapide donc on peut illustrer ce résultat avec j assez petit, par exemple $j = 20$.)

[2] E. G. Coffman Jr., M. Hofri, Kimming, So., AC. Yao. A Stochastic Model of Bin Packing. *Inf. and Control*, n.44,105-115, (1980).

S4. Simuler $N = 100000$ fois la variable L_j pour $j = 20$, et afficher les résultats dans un histogramme normalisé avec 50 bâtons. Afficher sur le même graphique la courbe $x \mapsto 3x^2$.
(*Si vos simulations sont correctes l'histogramme devrait être très proche de la courbe.*)

Solution.



1.2.3 Comparaison expérimentale avec deux autres stratégies

Nous allons étudier expérimentalement deux autres stratégies pour classer N paquets :

Stratégie *Prochaine-Qui-Convient-Décroissant*

On trie d'abord $X_1, \ldots, X_N$ dans l'ordre décroissant. Ensuite on applique la stratégie *Prochaine-Qui-Convient*. Voir l'exemple en Fig.1.2.

Stratégie *Gloutonne*

On affecte chaque paquet X_i à la boîte la plus à gauche parmi celles qui ont assez de place libre. Voir l'exemple en Fig.1.3.

S5. Pour chaque $N \in \{10, 20, 30, 40\}$, simuler $S = 1000$ fois les variables aléatoires $\phi(N)$ (c'est donc le nombre de boîtes requises pour ranger les N paquets) pour les trois stratégies *Prochaine-Qui-Convient*, *Prochaine-Qui-Convient-Décroissant* et *Gloutonne*. Pour chaque stratégie et chaque N, calculer la moyenne empirique des S simulations.
Afficher les 12 points obtenus sur un même graphique (en mettant N en abscisse). Conclure sur quelle est la meilleure stratégie.
(Pour trier une liste `L` *dans l'ordre croissant on peut utiliser* `np.sort(L)`*. Ensuite on peut parcourir la liste dans le sens inverse avec* `L[::-1]` *pour obtenir la suite dans l'ordre décroissant.)*

Solution.

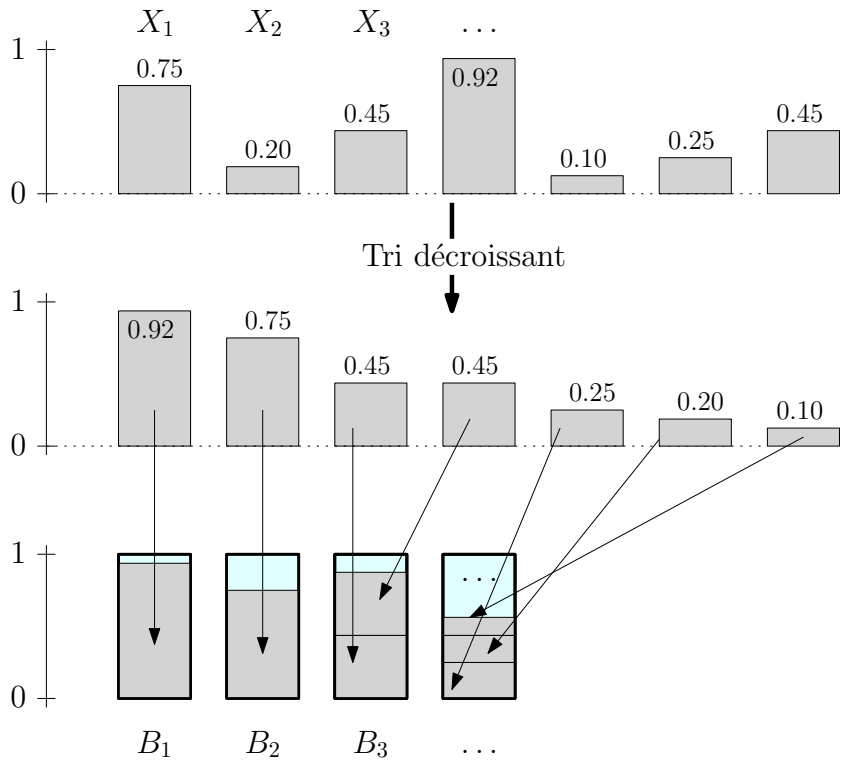


Figure 1.2 – L'affectation selon la stratégie *Prochaine-Qui-Convient-Décroissant*, avec les mêmes données que précédemment.

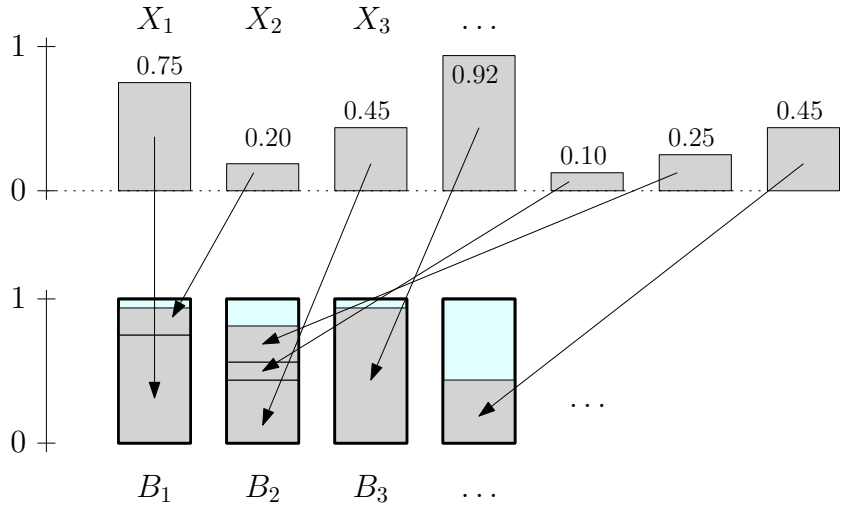


Figure 1.3 – L'affectation selon la stratégie *Gloutonne*, avec les mêmes données que précédemment.

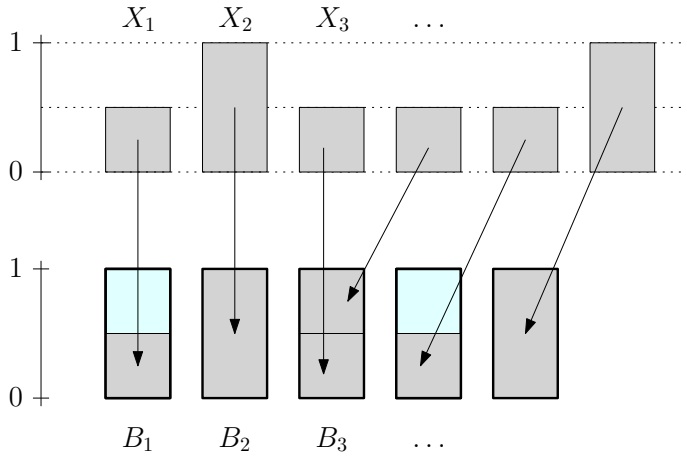
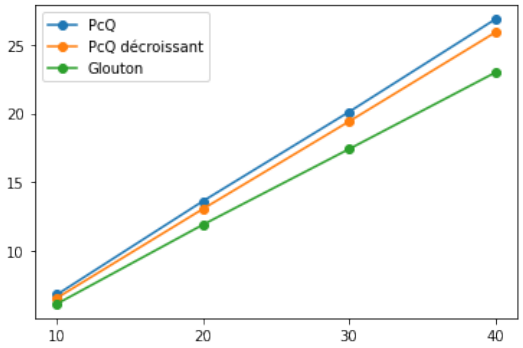


Figure 1.4 – Un exemple d'affectation selon la stratégie *Prochaine-Qui-Convient* avec des paquets discrets.



1.3 Paquets discrets

Dans cette partie du projet on ne considère que la stratégie Prochaine-Qui-Convient.

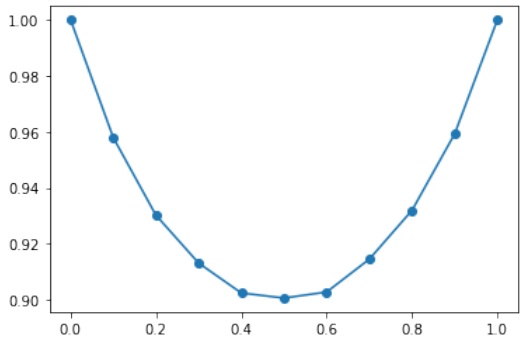
À partir de maintenant on suppose que les (X_i) sont discrets et à valeurs dans $\{1/2, 1\}$ (la suite est toujours i.i.d.). Les remplissages des boîtes $L_1, L_2, \ldots$ sont ainsi à valeurs dans $\{1/2, 1\}$. Soit $p \in [0, 1]$ tel que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1/2).$$

(Voir un exemple en Fig.1.4.) Pour cette loi très simple il est possible de démontrer des formules exactes et de les comparer aux simulations.

S6. [Remplissage moyen] Pour $S = 10000$, $N = 100$ et chaque $p \in \{0; 0.1; 0.2; 0.3; \ldots 0.9; 1\}$, simuler S fois la variable aléatoire $(L_1 + \cdots + L_N)/N$. Calculer pour chaque p la moyenne empirique obtenue et afficher les 11 points sur un même graphique (en mettant p en abscisse).

Solution.



T6. Démontrer que pour tout j,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_{j+1} = 1/2 \mid L_j = 1/2) &= 0,\\ \mathbb{P}(L_{j+1} = 1/2 \mid L_j = 1) &= p(1-p).\end{aligned}$$

Solution. La première équation est claire : il est impossible d'avoir $L_{j+1} = 1/2$ car alors le paquet dans B_{j+1} aurait pu se ranger dans B_j. Pour la seconde équation, on vérifie que si l'on part de $L_i = 1$ alors on ne peut avoir $L_{j+1} = 1/2$ que dans la situation où on observe un paquet de taille $1/2$ puis un paquet de taille 1.

T7. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(L_j = 1)$ pour tout p et tout j. Calculer le remplissage moyen asymptotique

$$g(p) := \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}[L_1 + \cdots + L_N]. \qquad (\S)$$

Pour vérifier votre calcul, vous pouvez tracer sur la même courbe que la question S6 la courbe $p \mapsto g(p)$.

Solution. On note $p_j = \mathbb{P}(L_j = 1)$. On a $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1/2) = p + (1-p)^2$. Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_{j+1} = 1) &= \mathbb{P}(L_{j+1} = 1 \mid L_j = 1) \times \mathbb{P}(L_j = 1) + \mathbb{P}(L_{j+1} = 1 \mid L_j = 1/2) \times \mathbb{P}(L_j = 1/2)\\ p_{j+1} &= (1 - p(1-p)) \times p_j + 1 \times (1 - p_j)\\ &= -p(1-p)p_j + 1.\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$p_j = \frac{1}{1+p(1-p)} + (-p(1-p))^{j-1} \times \left(p_1 - \frac{1}{1+p(1-p)}\right) = \frac{1}{1+p(1-p)} + o(1).$$

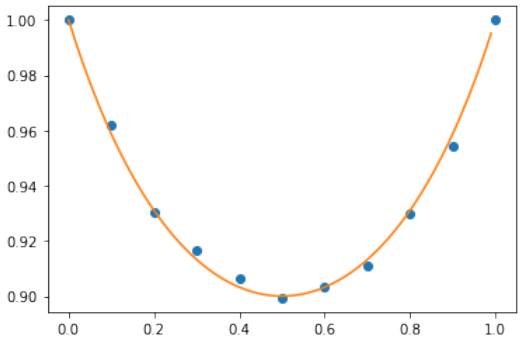
On a donc

$$\mathbb{E}[L_j] = 1 \times p_j + 1/2 \ \times (1 - p_j) = \frac{1 + p(1-p)/2}{1+p(1-p)} + o(1).$$

Par Cèsaro on obtient

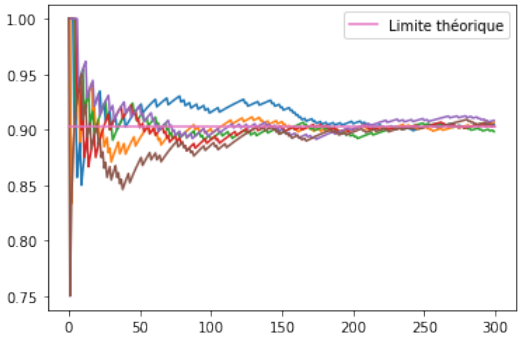
$$\frac{1}{N}\mathbb{E}[L_1 + \cdots + L_N] \to \frac{1 + p(1-p)/2}{1+p(1-p)}.$$

Si on trace $p \mapsto g(p)$ ça colle très bien :



S7. Il se trouve que non seulement on a la convergence en espérance dans (§) mais on a également la convergence presque-sûre $(L_1 + \cdots + L_N)/N \to g(p)$. Confirmer par une simulation le fait que la convergence est presque-sûre.
(On se limitera à un seul p fixé. À vous de choisir p, N, le nombre de simulations et le type de simulation appropriés pour illustrer la convergence.)

Solution. Pour $p = 0.6$, si l'on trace 6 trajectoires différentes de $N \mapsto (L_1 + \cdots + L_N)/N$ on obtient :



T8. (Bonus) En utilisant les questions précédentes, faites une conjecture (argumentée) pour la limite $\lim_N \frac{1}{N}\phi(N)$ en fonction de p. (On ne demande pas une preuve rigoureuse, vous pouvez vérifier votre formule à l'aide de simulations.)

Solution. Par construction on a bien sûr

$$X_1 + \cdots + X_N = L_1 + \cdots + L_{\phi(N)} + \mathcal{O}(1).$$

(Le $\mathcal{O}(1)$ provient du fait que peut-être quelques autres paquets sont rangés dans la boîte $\phi(N)$.) Le terme de gauche vaut à peu près $N \times (p + (1-p)/2)$. Le terme de droite vaut à peu près $\phi(N)g(p)$. D'où

$$\phi(N) \sim N \frac{p + (1-p)/2}{g(p)}.$$